

# 1 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は11ページ, 4問である。)

## 受験についての注意

1. 試験監督者の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に, 試験監督者から指示があったら, 解答用紙1ページ目の左上に氏名と受験番号を記入し, 所定のマーク欄をぬりつぶすこと。
3. 試験監督者から試験開始の指示があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は, HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能を使用してはならない。また, スマートウォッチなどのウェアラブル端末を使用してはならない。
5. 解答は, 解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで, そのマーク欄をぬりつぶすこと。
6. マークをするとき, マーク欄からはみ出したり, 白い部分を残したり, 文字や番号, ○や×をつけたりしてはならない。また, マーク箇所以外の部分には何も書いてはならない。
7. 訂正する場合は, 消しゴムでていねいに消したうえで, 消しきずはきれいに取り除くこと。
8. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはならない。
9. 試験監督者の許可なく試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。
12. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

## マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ  $-$  にマークせよ。(0 または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄とも Z にマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、 $-$ にはマークしない。)

〔解答記入例〕 ア に 7, イ に  $-26$  をマークする場合。

	符号	10 の 位										1 の 位											
ア	$-$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	$-$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$  を,  $\frac{\square}{\square}$  にあてはめる場合  $\frac{\square{-3}}{\square{2}}$  とする。

0 を,  $\frac{\square}{\square}$  にあてはめる場合  $\frac{\square{0}}{\square{1}}$  とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$  を,  $\frac{\square}{\square}\sqrt{\square}$  にあてはめる場合  $\frac{\square{-1}}{\square{2}}\sqrt{\square{3}}$  とする。

$-x^2 + x$  を,  $\square x^2 + \square x + \square$  にあてはめる場合

-1  $x^2 +$  1  $x +$  0 とする。

(余白ページ)

1 座標平面上の放物線  $C_1 : y = x^2$  と円  $C_2 : x^2 + (y - b)^2 = a^2$  を考える。ただし、 $a, b$  は正の実数とする。

(1)  $C_1$  と  $C_2$  が共有点をちょうど3つもつための必要十分条件は

$$b = \boxed{\text{ア}} a \quad \text{かつ} \quad a > \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

(2)  $C_1$  と  $C_2$  が異なる2点で接するための必要十分条件は

$$b = \boxed{\text{エ}} a^2 + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \quad \text{かつ} \quad a > \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。(ただし、 $C_1$  と  $C_2$  が共有点  $P$  で接するとは、 $P$  における  $C_1$  の接線と  $C_2$  の接線が等しいことをいう。) また、このとき2つの接点のうち  $x$  座標が正のものを  $A(\alpha, \beta)$  とすると、

$$\beta = \boxed{\text{ケ}} a^2 + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。 $A$  における共通の接線の傾きが  $\sqrt{3}$  であるとき、直線  $y = \beta$  の下側で、 $C_1$  と  $C_2$  に囲まれた部分の面積は

$$\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \sqrt{\boxed{\text{セ}}} - \frac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

(余白ページ)

2  $t$  を実数とし、座標空間の 3 点

$$A\left(\frac{t}{3}, t, t\right), \quad B(1, t+1, t+1), \quad C(t, t-1, t-2)$$

を考える。

(1) 線分 BC が  $xy$  平面と共有点をもつための必要十分条件は

$$\boxed{\text{タ}} \leq t \leq \boxed{\text{チ}}$$

であり、このとき共有点の座標を  $(p, q, 0)$  とすると

$$p = \frac{1}{3} \left( \boxed{\text{ツ}} t^2 + \boxed{\text{テ}} \right), \quad q = \frac{1}{3} \left( \boxed{\text{ト}} t + \boxed{\text{ナ}} \right)$$

である。

(2) 3 点 A, B, C を通る平面を  $\alpha$  とする。 $\alpha$  上の  $\triangle ABC$  と  $xy$  平面が共有点をもつための必要十分条件は

$$\boxed{\text{ニ}} \leq t \leq \boxed{\text{ヌ}}$$

である。 $t$  がこの範囲を動くとき、 $\alpha$  上の  $\triangle ABC$  と  $xy$  平面の共通部分の長さの最大値は

$$\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}$$

である。

(余白ページ)

**3**

(1) 1 と異なる正の実数  $a, b$  が

$$\begin{cases} \log_a b + \log_b a^3 = 4 \\ ab^2 = 4 \end{cases}$$

を満たしている。このとき、 $a \neq b$  ならば

$$\log_2 a = \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}, \quad \log_2 b = \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$$

である。

(2) 異なる 2 つの正の実数  $\alpha, \beta$  が  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$  を満たすとき、

$$A = \alpha + \beta, \quad B = 2\sqrt{\alpha + \beta}, \quad C = \sqrt{2\alpha} + \sqrt{2\beta}$$

の大小を不等号を用いて表すと

$$\boxed{\text{あ}} < \boxed{\text{い}} < \boxed{\text{う}}$$

である。

(3) 正の奇数  $n$  に対して、 $n$  以下のすべての正の奇数の積を  $n!!$  と表す。例えば、 $5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$  である。

$2025!!$  は 31 で最大  $\boxed{\text{マ}}$  回割り切れる。

(余白ページ)

4

赤玉 3 個, 青玉 2 個, 白玉 1 個の合計 6 個の玉が入った袋がある。  
A, B の 2 人が,

$$A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow A$$

の順番で, この袋から玉を 1 個ずつ取り出す。ただし, 一度取り出した玉は袋に戻さないものとする。

A は赤玉と白玉を出せば勝ち, B は青玉と白玉を出せば勝ち, A も B も勝ちにならないければ引き分けというルールで, A, B の 2 人が勝負を行う。

(1) A が勝つ確率は  $\frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}}$ , B が勝つ確率は  $\frac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}}$  である。

(2) A  $\rightarrow$  B と 2 個目の玉を取り出した時点で, 引き分けが確定する確率は  $\frac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}$  である。

(3) A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  B と 3 個目の玉を取り出した時点で勝負の結果が確定していないとき, 4 個目の玉を取り出して A が勝つ確率は  $\frac{\boxed{\text{ヨ}}}{\boxed{\text{ラ}}}$  である。

(余白ページ)

