

2 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は6ページ, 4問である。)

受験についての注意

1. 試験監督者の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に, 試験監督者から指示があったら, 解答用紙1ページ目の左上に氏名と受験番号を記入し, 所定のマーク欄をぬりつぶすこと。
3. 試験監督者から試験開始の指示があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は, HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能を使用してはならない。また, スマートウォッチなどのウェアラブル端末を使用してはならない。
5. マーク式の解答は, 解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで, そのマーク欄をぬりつぶすこと。
6. マークをするとき, マーク欄からはみ出したり, 白い部分を残したり, 文字や番号, ○や×をつけたりしてはならない。また, マーク箇所以外の部分には何も書いてはならない。
7. 記述式の解答は, 解答用紙の所定の欄に丁寧に記入すること。その他の部分には何も書いてはならない。
8. 訂正する場合は, 消しゴムで丁寧に消したうえで, 消しきずはきれいに取り除くこと。
9. 記述式解答用紙の最下段の横線の下欄には記入しないこと。
10. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはならない。
11. 試験監督者の許可なく試験時間中に退場してはならない。
12. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
13. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。
14. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ $-$ にマークせよ。(0 または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄とも Z にマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、 $-$ にはマークしない。)

〔解答記入例〕 ア に 7, イ に -26 をマークする場合。

	符号	10 の 位										1 の 位											
ア	$-$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	$-$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2 + x$ を, $\boxed{}x^2 + \boxed{}x + \boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}x^2 + \boxed{1}x + \boxed{0}$ とする。

1 正の実数 a を含む定積分

$$F(a) = \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{e^{-ax}}{1+x} dx$$

の近似値を次の手順で求めたい。

(1) $x \geq 0$ のとき, 任意の自然数 n に対して

$$\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{(-x)^n}{1+x}$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) k を 0 以上の整数とし,

$$I_k(a) = \int_0^{\frac{1}{a}} (-x)^k e^{-ax} dx$$

とおく。このとき, $I_0(a)$, $I_1(a)$ を求めよ。

(3) 任意の自然数 n に対して

$$\left| \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{(-x)^n e^{-ax}}{1+x} dx \right| \leq \frac{1}{(n+1)a^{n+1}}$$

が成り立つことを証明せよ。

(4) (1), (2), (3) の結果を利用して $F(10)$ の近似値を小数第 3 位まで求めよ。また, 求めた近似値と真の値との差が 0.001 未満である理由を説明せよ。ただし, 必要ならば $e^{-1} = 0.368$ として使ってよい。

2

- (1) 右の図のような 3×3 のマス目 A から I のうち、1 マス以上を黒く塗りつぶす。黒く塗られたマスが縦横斜めに隣り合わないような塗り方は全部で 通りある。ただし「斜めに隣り合う」とは、例えば A と E のような位置にあるときを言う。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

- (2) R, G, B の 3 種類の文字を使って作られた長さ N の文字列全ての中から無作為に 1 つの文字列を選び、次の操作を行う。

操作 同じ文字が 2 個以上続く場合は、その文字の並びを「文字」と「並ぶ個数」の 2 文字に置き換える。このとき、連続する同じ文字はすべてまとめて操作する。

例えば、 $N = 3$ で、「RRB」の場合は、操作により「R2B」となる。 $N = 4$ で、「RRRR」の場合は、操作により「R4」となる。「R2R2」とはしない。

操作により文字列が短くなる確率は、 $N = 3$ のとき $\frac{\text{イ}}{\text{ウ}}$,

$N = 4$ のとき $\frac{\text{エ}}{\text{オ}}$, $N = 6$ のとき $\frac{\text{カ}}{\text{キ}}$ である。

3

底面が半径1の円で、高さが2である円筒のコップに水が満たしてある。これを静かに角 θ だけ傾けたときの水面の面積を S 、コップの中に残る水の体積を V とする。なお、表面張力は考慮しない。

$$(1) \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき, } S = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}} \pi,$$

$$V = \left(\boxed{\text{サ}} + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \sqrt{\boxed{\text{セ}}} \right) \pi \text{ である。}$$

(2) $\tan \theta = 2$ を満たす θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) だけ傾けたとき、

$$S = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \sqrt{\boxed{\text{チ}}} \pi, \quad V = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \text{ である。}$$

4 面積が 20 である正方形 ABCD を底面とし、面積が 15 である合同な二等辺三角形を各側面とする正四角錐 O-ABCD を考える。

(1) 辺 OA の長さは $\boxed{\text{ト}} \sqrt{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

(2) 辺 OA を 3 : 1 に内分する点を P, 辺 OC の中点を Q とし, 3 点 B, P, Q を通る平面 α で正四角錐 O-ABCD を切断する。平面 α と辺 OD との交点を R とするとき,

$$\vec{OR} = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \vec{OD}$$

である。

(3) 頂点 A を始点とし, 正四角錐 O-ABCD の側面上を移動して辺 OB 上の点を通って辺 OC 上の点まで至る道を考える。このとき, 長さが最小の道を l とし, l の終点を T, l と OB の交点を S

とする。 l の長さは $\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}$ であり,

$$\vec{OT} = \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}} \vec{OC}, \quad \vec{OS} = \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}} \vec{OB}$$

である。

