２０２５年度２月入試　大学院入試問題　**解答または解答例**

理工学　専攻　（博士前期/修士）
試験科目：専門科目　（　理工基礎（機械工学基礎）　）

1

1) $\lambda_1 = -2$がひとつの固有値なら、$|\lambda_1 I - A| = 0$

$$\therefore \begin{vmatrix} \lambda_1 - 3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda_1 + 1 & -a \\ 2 & -2 & \lambda_1 + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -a \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 12a = 0$$

$\therefore a = 0$

2)$A^{-1}\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{w}$なので、$\boldsymbol{w} = \lambda A \boldsymbol{w}$になる。この式に$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ -2 \end{bmatrix}$を代入すると下記になる。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ b \\ -2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ b \\ -2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3 + b \\ -4 - b \\ 2b + 2 \end{bmatrix}$なので、1行目と3行目の成分は比例関係になる。

$\frac{1}{-2} = \frac{3+b}{2b+2}$

$\therefore b = -2$

$\begin{bmatrix} 1 \\ b \\ -2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3 + b \\ -4 - b \\ 2b + 2 \end{bmatrix}$に$b = -2$を代入すると

$$\lambda = 1$$

が得られる。

３）$\lambda_i I = A v_i$を解くと、以下の固有値と固有ベクトルが得られる。

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1,\ \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

４）$4A^5 - 3A^4 - 10A^3 + 17A^2 - 7A - 11I = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -20 & -20 & 0 \\ -10 & 10 & -25 \end{bmatrix}$

理工学　専攻（博士前期/修士）
試験科目：専門科目　（　理工基礎（機械工学基礎）　）

2

(1)

$(x,y,z)=(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}})$ のとき最大値$\sqrt{14}$,

$(-\frac{1}{\sqrt{14}},-\frac{2}{\sqrt{14}},-\frac{3}{\sqrt{14}})$ のとき最小値 $-\sqrt{14}$

(2)

両辺にdxをかける

$$\frac{1}{\cos^2 y}dy=\sin x dx$$

両辺を積分する

$$\int\frac{1}{\cos^2 y}dy=\int\sin x dx+C$$

$$\tan y=-\cos x+C \quad (C\text{は任意定数})$$

$$\tan y+\cos x=C \qquad (1)$$

この式に初期条件$x=\frac{\pi}{4}, y=0$を代入する

$$\tan\frac{\pi}{4}+\cos 0=C$$

$$C=2$$

よって，（1）に代入する

$$\tan y+\cos x=2$$

(3)

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$とおくと，rとθの積分範囲は$1\leq r\leq 2\sin\theta$，$\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$である．したがって

$$\iint_D x\,dxdy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{2\sin\theta}r\cos\theta\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\cos\theta\right]_1^{2\sin\theta}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{8}{3}\sin^3\theta\cos\theta-\frac{1}{3}\cos\theta\right)d\theta$$

ここで$\sin\theta=t$とおくと，上式は以下のように書き換えられる．

$$\frac{8}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^3dt-\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=\frac{8}{3}\left[\frac{t^4}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\frac{1}{3}\left[\sin\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{11}{24}$$

(4)

ラプラス変換の定理により$L(f(t))=\frac{1}{s(s+a)}$

初期値定理により$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}s\frac{1}{s(s+a)}=0$

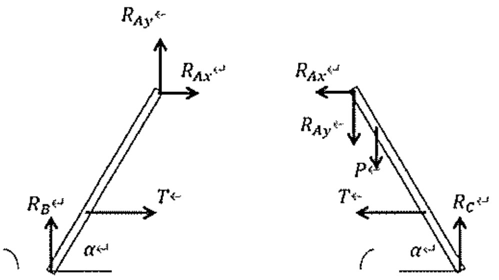
最終値定理により$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{s(s+a)}=\frac{1}{a}$

理工学　専攻（博士前期/修士）
試験科目：専門科目　（　理工基礎（機械工学基礎）　）

3

(1)

棒 AB と AC のフリーボディダイヤグラム



棒 AB のつり合い式

力のつり合い式

水平方向：$T + R_{Ax} = 0$

垂直方向：$R_B + R_{Ay} = 0$

A 点におけるモーメントのつり合い式：$T \times h - R_B \times l\cos\alpha = 0$

棒 AC のつり合い式

力のつり合い式

水平方向：$-T - R_{Ax} = 0$

垂直方向：$-R_{Ay} - P + R_C = 0$

A 点におけるモーメントのつり合い式：$-P \times (l-a)\cos\alpha - T \times h + R_C \times l\cos\alpha = 0$

よって，$T = \frac{aP\cos\alpha}{2h}$

(2)

①

円板の面積は πa^2 であるから，面密度を σ とおくと $\sigma = \dfrac{M}{\pi a^2}$ である．

次に半径 r，幅 dr の円環を考えると円環の面積 dA は $dA = 2\pi r dr$ である．これより円環の微小質量 dm は $dm = \sigma dA = \dfrac{M}{\pi a^2} 2\pi r dr$ と表される．以上を用いると慣性モーメント I は

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^a r^2 dm \\
&= \int_0^a r^2 \left(\frac{M}{\pi a^2} 2\pi r dr \right) \\
&= \frac{2M}{a^2} \int_0^a r^3 dr \\
&= \frac{2M}{a^2} \cdot \frac{a^4}{4} \\
&= \frac{Ma^2}{2}
\end{aligned}
$$

②

並進運動　$M\ddot{x} = -Mg\sin\theta - F$

回転運動　$I\dot{\omega} = aF$

③

摩擦力 $F = \mu Mg\cos\theta$ より

$\ddot{x} = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta)$

$\dot{\omega} = 2\mu g\cos\theta / a$

それぞれを１回積分し，時刻 t＝0 のとき $\dot{x} = v_0$，$\omega = 0$ を代入すると

$\dot{x} = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta)t + v_0$

$\omega = 2\mu g\cos\theta \ t/a$

すべり速度 $\dot{x} - a\omega = 0$ のときに滑りが停止するので

$\dot{x} - a\omega = -g(\sin\theta + 3\mu\cos\theta)T + v_0 = 0$

$$T = \frac{v_0}{g(\sin\theta + 3\mu\cos\theta)}$$

理工学　専攻（博士前期/修士）

試験科目：専門科目　（　理工基礎（機械工学基礎）　）

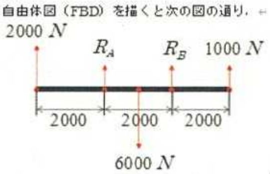
4【材料力学】

(1)

$$I=\frac{\pi d^4}{64}=\frac{\pi\times 50^4}{64}=306796\,mm^4$$

(2)

自由体図（FBD）を描くと次の図の通り．



鉛直方向の力（上向き正）のつり合い

$R_A+R_B+2000+1000-6000=0$

はりのＡ点まわりの力のモーメント（時計回り正）のつりあい

$-R_B\times2000-1000\times4000+2000\times2000+6000\times1000=0$

二つの式を連立させて R_A, R_B を解くと

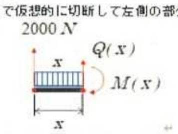
$R_A=0\,N,\quad R_B=3000\,N$

(3)

はりの左端を原点とし右向き正の x 座標を設定する．

・区間[0,4000]

位置 x で仮想的に切断して左側の部分について自由体図（FBD）を描くと



鉛直方向の力（上向き正）のつり合い

$2000+Q(x)-x=0$

はりの左端（x=0）まわりの力のモーメント（時計回り正）のつりあい

$$M(x)-Q(x)x+\frac{x^2}{2}=0$$

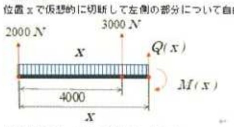
二つの式から Q, M を求めると

$Q(x)=x-2000$

$$M(x)=-\frac{x^2}{2}+(x-2000)x=\frac{x^2}{2}-2000x=\frac{1}{2}(x-2000)^2-2000000$$

・区間[4000,6000]

位置 x で仮想的に切断して左側の部分について自由体図（FBD）を描くと



鉛直方向の力（上向き正）のつり合い

$2000+Q(x)+3000-x=0$

はりの左端（x=0）まわりの力のモーメント（時計回り正）のつりあい

$$M(x)-Q(x)x+\frac{x^2}{2}-3000\times4000=0$$

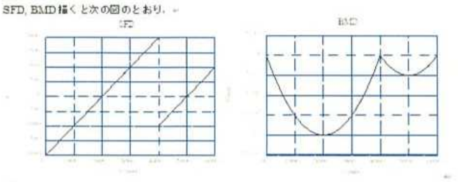
二つの式から Q, M を求めると

$Q(x)=x-5000$

$$M(x)=-\frac{x^2}{2}+(x-5000)x+12000000=\frac{x^2}{2}-5000x+12000000=\frac{1}{2}(x-5000)^2-500000$$

(4)

SFD, BMD 描くと次の図のとおり．



(5)

最大曲げ応力の発生点は最大曲げモーメント M_{max} が発生する x=2000mm の位置で、その大きさは 2×10^6Nmm であるので、最大曲げ応力は，

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{I}\times25=\frac{2\times10^6}{306796}\times25=162.97\,MPa$$

となる．

理工学　専攻（博士前期/修士）
試験科目：専門科目　（　理工基礎（機械工学基礎）　）

5【機械力学】

（1）
静的平衡点を原点とすると，運動方程式は以下のようになる．
$$m\ddot{x} = -kx$$
（2）
固有振動数は以下のようになる．
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
（3）
（2）より，運動方程式は以下のようになる．
$$\ddot{x} + \omega_n^2 = 0$$
この解は
$$x = e^{\lambda t}$$
と置くことができるので，解は以下のようになる．
$$x_1 = e^{i\omega t}, x_2 = e^{-i\omega t}$$
ここでオイラーの公式を用いると，
$$x(t) = x_0 cos\omega_n t + \frac{v_0}{\omega} sin\omega_n t$$
となる．

理工学　専攻（博士前期/修士）
試験科目：専門科目　（　理工基礎（機械工学基礎）　）

6　【熱工学】

（1）

状態 1, 2 に対して

$$P_1V_1^n = P_2V_2^n$$

両辺の対数をとると

$$\ln P_1 + n\ln V_1 = \ln P_2 + n\ln V_2$$

よって

$$n = \frac{\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}$$

（2）

絶対仕事の定義式より

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV$$

ポリトロープ変化なので（$n \neq 1$）

$$P = CV^{-n}$$

したがって

$$W = \int_{V_1}^{V_2} C\,V^{-n}\,dV = \left[\frac{C}{1-n}V^{1-n}\right]_{V_1}^{V_2}$$

整理すると

$$W = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{1-n}$$

圧縮に要する仕事を正とすれば

$$W_{\text{in}} = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{n-1}$$

【補足】
本問では M は与えられているが、ポリトロープ関係と仕事式から直接求められるため、必ずしも使用する必要はない。

理工学　専攻（博士前期/修士）
試験科目：専門科目　(　理工基礎（機械工学基礎）　)

7　流体工学

（1）ベルヌーイの式を変形してゲージ圧を求める.

$$p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_d^2 + \rho g h_1 = pg + \rho g h_2$$

標高の変化はないため$h_1 = h_2 = 0$であり，ゲージ圧では大気圧$p_{atm} = 0$である．したがってドローン機首のよどみ点の圧力（ゲージ圧）は

$$p_g = \frac{1}{2}\rho v_d^2$$

（2）ドローンは高度を維持しており，よどみ点の流速はゼロであることから，ベルヌーイの式を用いてドローンの機首のよどみ点とウェイクの間の圧力差を計算できる.

$$p_s - p_w = \frac{1}{2}\rho(v_w^2)$$

２０２５年度２月入試　大学院入試問題　**解答または解答例**

理工学　専攻（博士前期/修士）
試験科目：専門科目　（　理工基礎（機械工学基礎）　）

8【精密工学】

- 正弦波プロファイルの場合：

$$z(x) = A_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$Ra = \frac{1}{L}\int_0^L |z(x)|\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L \left|A_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right| dx$$

$$Ra = \frac{4}{\lambda}\int_0^{\lambda/4} \left|A_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right| dx \rightarrow \frac{4}{\lambda}\left|-A_0\frac{\lambda}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right|_0^{\lambda/4}$$

$$\rightarrow \left|\frac{-2A_0}{\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right|_0^{\lambda/4} \quad \therefore \boldsymbol{Ra = \frac{2A_0}{\pi}}$$

$$Rq^2 = \frac{1}{L}\int_0^L z(x)^2\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L A_0^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) dx$$

$$Rq^2 = \frac{4}{\lambda}\int_0^{\lambda/4} A_0^2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}x\right)\right] dx$$

$$Rq^2 = \frac{2A_0^2}{\lambda}\left[x - \frac{\lambda}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{\lambda}x\right)\right]_0^{\lambda/4} \quad \therefore \boldsymbol{Rq = \frac{A_0}{\sqrt{2}}}$$

- 三角形プロファイルの場合：

$$@\, x \le \frac{\lambda}{4} \rightarrow z(x) = \frac{4A_1}{\lambda}x$$

$$@\, \frac{\lambda}{4} \le x \le \frac{3\lambda}{4} \rightarrow z(x) = 2A_1\left(1 - \frac{2}{\lambda}x\right)$$

$$@\, \frac{3\lambda}{4} \le x \le \lambda \rightarrow z(x) = 4A_1\left(-1 + \frac{1}{\lambda}x\right)$$

$$Ra = \frac{1}{L}\int_0^L |z(x)|\,dx = \frac{4}{\lambda}\int_0^{\lambda/4}\left|\frac{4A_1}{\lambda}x\right| dx$$

$$Ra = \frac{4}{\lambda}\left|\frac{4A_1}{2\lambda}x^2\right|_0^{\lambda/4} \rightarrow \therefore \boldsymbol{Ra = \frac{A_1}{2}}$$

$$Rq^2 = \frac{1}{L}\int_0^L z(x)^2\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L \left(\frac{4A_1}{\lambda}x\right)^2 dx$$

$$Rq^2 = \frac{4}{\lambda}\left|\frac{16A_1^2}{3\lambda^2}x^3\right|_0^{\lambda/4}$$

$$Rq^2 = \frac{A_1^2}{3} \rightarrow \therefore \boldsymbol{Rq = \frac{A_1}{\sqrt{3}}}$$

- 同じ Ra の場合 ⇒ $A_0 = \frac{\pi}{4}A_1$

- 同じ Rq の場合 ⇒ $A_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}A_1$

２０２５年度２月入試　大学院入試問題　**解答または解答例**

理工学　専攻（博士前期/修士）
試験科目：専門科目　（　理工基礎（機械工学基礎）　）

$\boxed{9}$【制御工学】

問題 1
図 7より

$$P(s) = k_1 \frac{k_2}{s(Ts+1)} = \frac{k_1 k_2}{s(Ts+1)}, D(s) = \frac{k_n}{T_n s + 1}$$

とすると、加え合わせ点の関係は

$$Y(s) = P(s)\{R(s) - Y(s)\} + D(s)N(s)$$

よって

$$(1+P)Y = PR + DN$$

(1) $n(t) = 0$（つまり $N(s) = 0$）のときの閉ループ伝達関数 $G_c(s) = Y/R$

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P(s)}{1+P(s)} = \frac{\frac{k_1 k_2}{s(Ts+1)}}{1 + \frac{k_1 k_2}{s(Ts+1)}} = \frac{k_1 k_2}{s(Ts+1) + k_1 k_2}$$

さらに分母を展開すると

$$G_c(s) = \frac{k_1 k_2}{Ts^2 + s + k_1 k_2}$$

(2) $r(t) = t$, $n(t) = t$のときの定常位置偏差 $e_{sse} = \lim_{t\to\infty}(r(t) - y(t))$
誤差 $E(s) = R(s) - Y(s)$とすると

$$Y = \frac{P}{1+P}R + \frac{D}{1+P}N$$
$$\Rightarrow E = R - Y = \frac{1}{1+P}R - \frac{D}{1+P}N = \frac{R - DN}{1+P}$$

ここで

$$r(t) = t \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$$
$$n(t) = t \Rightarrow N(s) = \frac{1}{s^2}$$

よって

$$E(s) = \frac{\frac{1}{s^2} - D(s)\frac{1}{s^2}}{1+P(s)} = \frac{1 - D(s)}{s^2} \frac{1}{1+P(s)}$$

最終値定理より

$$e_{sse} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1-D(s)}{s} \frac{1}{1+P(s)}$$

$$\begin{aligned} e_{sse} &= \lim_{s\to 0} \frac{1-D(s)}{s} \frac{1}{1+P(s)} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{1 - \frac{k_n}{T_n s + 1}}{s} \frac{1}{1 + \frac{k_1 k_2}{s(Ts+1)}} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{T_n s + 1 - k_n}{s(T_n s + 1)} \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1) + k_1 k_2} \\ &= \frac{1 - k_n}{k_1 k_2} \end{aligned}$$

(3) $k_2 = 1$, $k_n = 0$, $T = 3$, $T_n = 2$のとき，安定となる k_1の条件
$k_n = 0$なので外乱経路は消え，閉ループ特性方程式は

$$1 + P(s) = 0 \Rightarrow s(Ts+1) + k_1 k_2 = 0 \Rightarrow Ts^2 + s + k_1 k_2 = 0$$

また、$T = 3$, $k_2 = 1$より

$$3s^2 + s + k_1 = 0$$

2次系の安定条件（係数がすべて正）より

$$k_1 > 0$$

問題 2

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{s^2 + 5s + 6}$$

(1) 状態方程式表示（例：可制御正準形の一つ）
分母 $s^2 + 5s + 6$より

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

とすれば

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

で

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s+2}{s^2 + 5s + 6}$$

を満たす。

(2) 可制御性の判定
可制御行列

$$U_c = [B \ AB]$$

$$AB = AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow U_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \det(U_c) = -1 \neq 0$$

より $\mathrm{rank}(U_c) = 2$。したがって システムは可制御である。

(3) $x(0) = [1, 0]^T$, $u(t) = 0$のときの応答 $y(t)$
入力ゼロなので

$$x(t) = e^{At}x(0), y(t) = Cx(t).$$

この初期値に対して計算すると

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\right)^{-1} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2 + 5s + 6}\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$
$$y(t) = [2 \ 1]e^{At}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2e^{-3t}.$$

ここで、$\mathcal{L}^{-1}$はラプラス逆変換を意味する。

理工学　専攻（博士前期/修士）
試験科目：専門科目　（　理工基礎（機械工学基礎）　）

10【材料科学】

(1) 1300℃

(2) 1400℃～1040℃は液相、1040℃～980℃は液相と固相の2相、980℃～室温は固相の状態を図示

(3) L相（液体）:44%、S相（固溶体）：56％.

(4) $35.4\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$
　応力拡大係数
　　き裂周辺の応力分布を記述するのに便利
　　　負荷応力とき裂長さの関数

(5) 450MPa, 破断する.

＿＿理 工 学＿＿専攻　　　　　　　（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：第　外国語（　　　　）／ 専門科目 （ 理工基礎（電気・電子工学基礎） ）

試験時間：（　１５０　）分

1

(1) (a) $e^{x}(C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x))$ (b) $\frac{5x}{2+5Cx}$

(2) $\lambda=2, v=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \lambda=3, v=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}, \lambda=4, v=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

(3) $F(k\neq 0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{\sin kp}{k}), F(0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{p}$（双方２πで割ったものも正解）

2

(1) $\frac{8\rho a^2}{\varepsilon_0 y_1}$, y軸の正の向き

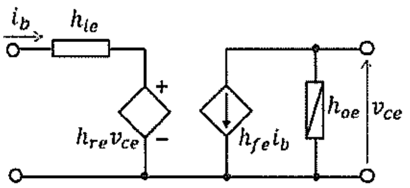
(2) (a) $\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{16}{y_1}-\frac{1}{y_1-2a}\right)$, y軸の正の向き (b) $\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\ln\frac{2^{17}}{5}$

3

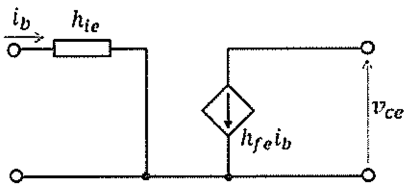
(1) $d\boldsymbol{B}=0\boldsymbol{e}_x+0\boldsymbol{e}_y+\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{(y^2+a^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_z$ (2) $\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}\boldsymbol{e}_z$

4

(1) $R_1\cong 3.1\ \mathrm{k\Omega}$ (2) $V_{CE}\cong 2.6\ \mathrm{V}$, $I_C=2.0\ \mathrm{mA}$ (3)（下図のどちらでも可） (4) $A_v=-50$



$h_{ie}=1.0\ \mathrm{k\Omega}$ $h_{re}=0$
$h_{fe}=100$ $h_{oe}=0\ S$



$h_{ie}=1.0\ \mathrm{k\Omega}$
$h_{fe}=100$

5

(1) $i(0)=\frac{E}{R}$ $v_c(0)=0$

(2) $0\leq t<t_1$: $v_c(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ $t_1\leq t$: $v_c(t)=E\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}(t-t_1)$

(3) (2)で得られた関数に従い，$0\leq t<t_1$では原点から正の指数特性で増加し電圧値はEに収束する。$t_1\leq t$では電圧値Eから電圧値$-E$を振動する波形を描く。

6

(1) $R=6\Omega$, $L=24\mathrm{H}$ (2) $\dot{I}_1=\frac{10}{3}\ \mathrm{A}$

(3) $\dot{E}$の初期位相ゼロかつ$\dot{I}_1$は$\dot{E}$より遅れ位相。$\dot{V}_2=\dot{V}_4$かつ$\dot{I}_1$と同相。$\dot{V}_3$と$\dot{I}_2$が同相。
$\dot{V}_3+\dot{V}_4$が$\dot{E}$と等しい。これらの条件を満たすように描く。

1

A.

問１

断熱変化なので、$Q_2 = Q_4 = 0$。

過程 1)と 3)のエントロピーはそれぞれ $Q_{\mathrm{I}}\ /\ T_1$ と $Q_{\mathrm{III}}\ /\ T_2$

エントロピーは状態関数で、初期状態と終状態が同じなので、$\Delta S = 0$

$\Delta S = Q_{\mathrm{I}}\ /\ T_1 + 0 + Q_{\mathrm{III}}\ /\ T_2 + 0 = 0$ より、$Q_{\mathrm{I}}\ /\ Q_{\mathrm{III}} = -T_1 / T_2$

問２

$-Q_{\mathrm{H}} = Q_{\mathrm{L}} + W$

$W = -(Q_{\mathrm{H}} + Q_{\mathrm{L}}) = -(Q_{\mathrm{H}} / Q_{\mathrm{L}} + 1)\, Q_{\mathrm{L}} = -(-T_{\mathrm{H}} / T_{\mathrm{L}} + 1)\, Q_{\mathrm{L}} = (T_{\mathrm{H}} / T_{\mathrm{L}} - 1)\, Q_{\mathrm{L}}$

問３

$(10000\ \mathrm{g} \times 334\ \mathrm{J\ g^{-1}}) / (24\ \mathrm{h} \times 3600\ \mathrm{s/h}) = 38.7\ \mathrm{J\ s^{-1}}$

問４

庫外から入る熱をモーターで庫内から出せば，庫内の温度を一定に保てる。

よって，問３の解答を Q_{L} としてモーターの電力を求めれば良い。

$W = (T_{\mathrm{H}} / T_{\mathrm{L}} - 1)\, Q_{\mathrm{L}} = (298\ \mathrm{K} / 273\ \mathrm{K} - 1) \times 38.7\ \mathrm{J\ s^{-1}} = 3.54\ \mathrm{W}$

B.

１）　熱力学第１法則

「エネルギー保存則」とも呼ばれ、「孤立系の内部エネルギーは一定である。」と表現される。

２）ラウールの法則

混合溶液のある成分の気相中の分圧が、混合溶液中のその成分のモル分率に比例する。

３）　ギブズの相律

可変度（平衡にある相の数に影響を与えずに、独立に変化させられる示強性変数の数）F，成分数 C，平衡にある相の数 P としたとき，$F = C - P + 2$ という関係があるというもの。

４）　共沸混合物

蒸発時の液相と気相の成分の組成が、それぞれ等しい混合物。

５）　反応ギブスエネルギーと化学平衡の関係

定温・定圧におけるある反応の反応ギブズエネルギーが，負であるならば順方向の反応が，正ならば逆方向の反応が自発的であり，0 ならば平衡状態である。

2

問１

$x \leqq 0$ および $L \leqq x$ ではポテンシャルエネルギーが無限大であり，そのようなエネルギーを持つ粒子を見出すことは物理的に不可能であるので、波動関数 $\psi(x) = 0$ でなくてはならない。

$$\psi(x) = A\exp(ikx) + B\exp(-ikx)$$

問２

$$\begin{aligned}\psi(x) &= A\exp(ikx) + B\exp(-ikx)\\ &= A(\cos(kx) + i\sin(kx)) + B(\cos(kx) - i\sin(kx))\\ &= (A+B)\cos(kx) + (A-B)i\sin(kx)\\ &= C\sin(kx) + D\cos(kx)\end{aligned}$$

$$C = (A-B)i, \qquad D = (A+B)$$

問３

$$\psi(0) = C\sin(0) + D\cos(0) = 0 + D\times 1 = 0$$

よって、$D = 0$ である。

$$\psi(L) = C\sin(kL) = 0$$

$C = 0$ とすると $\psi(x) = 0$ になって、どこにも粒子が存在しないことになってしまうので、C の値は不確定であり、$\sin(kL) = 0$ である。よって、$kL = n\pi$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$　でなくてはならない。

B．

１）　光電効果における仕事関数

光電効果で電子が固体から放出されるとき、電子１個が固体から取り去るのに必要なエネルギー。

２）　ボーアの振動数条件

二つの定常状態間の遷移によって放出（もしくは吸収）される光の振動数 ν は

$\Delta E = h\nu$　によって決まる。（ΔE：二つの定常状態間のエネルギー差，h：プランク定数）

３）　パウリの排他原理

２個より多くの電子が任意に与えられた一つのオービタルを占めることはできない。もし、２個が一つオービタルを占めるのならば、そのスピンは対になっていなくてはならない。

3

問1

1) CH_3COOH：酸，プロトン H^+を供与して CH_3COO^-となるから
NaOH：アルカリ，プロトン H^+を受け取って $Na^+ + H_2O$ となるから

2) $K_a = [H^+][CH_3COO^-]/[CH_3COOH] = 10^{-4.7}$ M (=mol dm^{-3})　$[CH_3COOH] >> [H^+]$と考えられ，また水の電離もほぼ無視できるので，$[H^+]^2 = 10^{-4.7}$ M × 0.060 M = 1.197×10^{-6} M^2
∴ $[H^+] = 1.094 \times 10^{-3}$ M　pH = <u>2.96</u>

3) 0.060 M 酢酸 0.10 L と 6.0 M 水酸化ナトリウム溶液 1.0 ｍＬで等量になる．このとき pH = pK_aとなるので，
∴ $[H^+] = 10^{-4.7}$ M　　pH = <u>4.7</u>

4) 丁度中和点になるので，CH_3COONa の電離で発生する$[CH_3COO^-]$を考える．
$pH = pK_w - 1/2\{pK_b - \log_{10} C_{CH3COO-}\}$ = <u>7.96</u>

問2

純水中なので，$[Ag^+]=[Cl^-]$としてよい．$K_{sp}=[Ag^+][Cl^-] = 1.78 \times 10^{-10}$ mol^2dm^{-6} なので$[Ag^+] = 1.334 \times 10^{-5}$ M
これが AgCl の溶解度を x g dm^{-3}とすると x = 1.334×10^{-5} mol dm^{-3} × 143.4 $gmol^{-1}$ = 1.91×10^{-5} g dm^{-3}

問3

1) E° = (+0.80 V)-(-0.26 V) = + 1.06 V
2) E° の値が正となるので，反応は自発的に進む

4

問1

1) 多段階の錯形成反応において，金属イオンと最終生成物との間の結合定数．全安定度定数は各段階の結合定数である逐次安定度定数の積として表現できる．

2) 気体状態において，元素またはイオンから電子ひとつを奪い去るのに必要なエネルギー．イオン化エネルギーは必ず正の値をとる．１つ目の電子を取り除くに必要なエネルギーを第一イオン化エネルギーという．

3) 遷移金属の中の１つのグループにある元素群．価電子が f 軌道上にある原子であり，大きくランタノイドとアクチノイドに分けられる．）

問2

A) sp3 結合により３次元的に連なった結晶構造　純粋なものは電気を通さない．

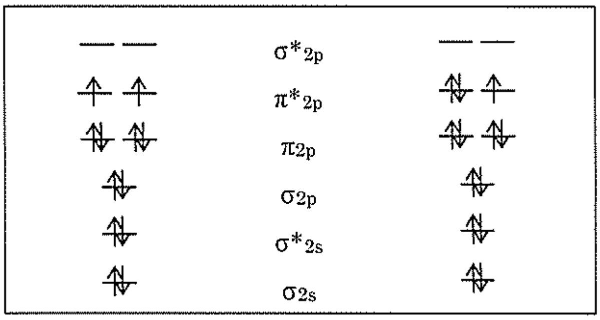
B) sp2 結合により六角網目構造が連なった平面が積み重なった構造．　導電性が高い．

C) sp2 結合によるベンゼン構造がリング状に輪を巻き，それが積み重なってチューブ状になった構造（何種類かある；単層/多層もある）導電性を持つが，構造により電気伝導度はことなる．

問3

O_2原子　　　　O_2^-イオン

結合次数：2　　　結合次数：1.5



問4

1) $[CoCl_3(NH_3)_3]$ ：*mer*- / *fac*- 構造

$[CoCl_2(NH_3)_4]^+$：*cis*/*trans*-構造.

いずれも光学異性体は存在しない.

2) 最外殻は d^8 構造をとる. ヤーンテラー効果が最大化されて平面四角形になる.

理工学　専攻（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：第　外国語（　　）／ 専門科目（　理工基礎　（化学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

5

問１

1) (*Z*)-3-chlorohex-2-ene　2) (*R*)-3-methylpentanal　3) 3-chloroaniline (1-amino-3-chlorobenzene)

1) (*Z*)-3-クロロ-2-ヘキセン 2) (*R*)-3-メチルペンタナール 3) 3-クロロアニリン (1-アミノ-3-クロロベンゼン)

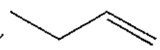
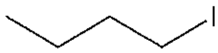
日英いずれでも可

問２

A > C > B

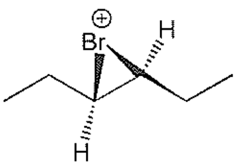
熱力学的に安定なものは水素化の反応熱がより小さい。**B, C** はアルキル置換基が多く、超共役のため **A** より安定である。トランス体の **B** はシス体の **C** より置換基同士の立体反発が少ないため **C** より安定である。

問３

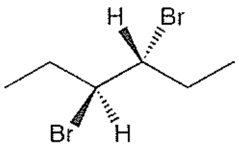
(1) (a) E2, 1-ブテン 　(b) S_N2, 1-ヨードブタン 

(2) (b)では求核剤が臭素に隣接する求電子的な炭素に求核攻撃したが、(a)では塩基（求核剤）が嵩高いため求電子的な炭素に近寄れず、隣接炭素上の水素を引き抜き脱離が起こった。

問４.

(1) 

ブロモニウムイオン

(2) 

アンチ付加体であること

２０２５年度大学院入試問題（２０２５年　２月１６日実施）　**解答または解答例**

理工学　専攻（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

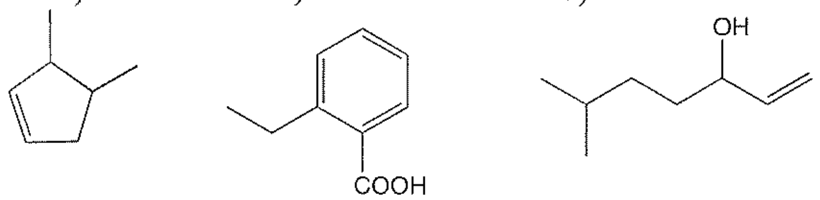
試験科目：第　外国語　（　　　　）／ 専門科目 （　理工基礎　（化学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

6

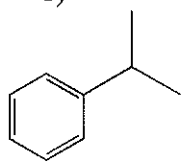
問１

1)　　2)　　3)

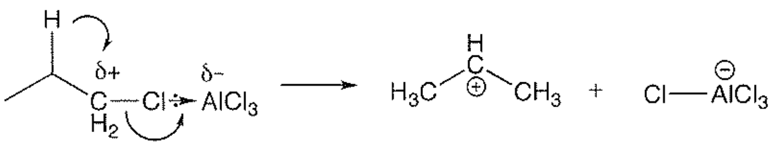


問２

1)



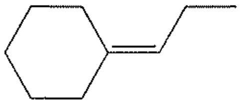
2)

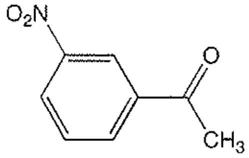


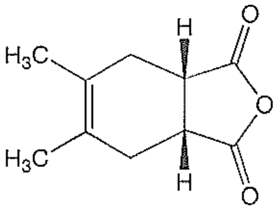
プロパンの２級カチオンが示してあれば可

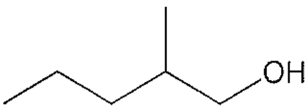
解答例：塩素がルイス酸である塩化アルミニウムに引き抜かれて１級カチオンが生成するが、隣接水素が速やかにヒドリド転位してより安定な２級カチオンが生成する

問3

1) 

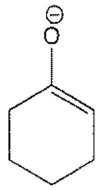
2) 

3) 

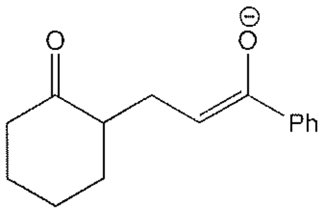
4) 

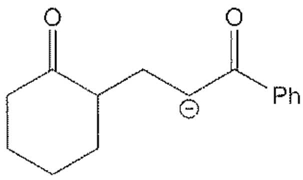
問4.

1)

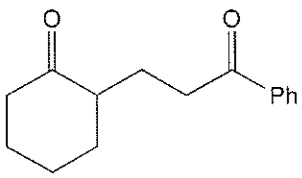


2)



右図も可とします→ 

3)



2025年度２月入試（理工学専攻（博士前期）：数学基礎）

解答例

$\boxed{1}$ （解答要旨）集合・写像・同値関係に関する基本的な用語の定義、および基礎事項や簡単な例に関する証明を問う問題で、証明は極めて定型的な議論で行える。

(1)
i. $\forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a'$
ii. $\exists a, a' \in A : f(a) = f(a')$ かつ $a \neq a'$
iii. $\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$
iv. $\exists b \in B : \forall a \in A : f(a) \neq b$

(2)
i. $\forall a, a' \in A$ をとり、$g \circ f(a) = g \circ f(a')$ とする。
$g(f(a)) = g(f(a'))$.
g：単射なので、$f(a) = f(a')$.
f：単射なので、$a = a'$.
従って、$g \circ f$：単射。

ii. $\forall c \in C$ をとる。
g：全射なので、$\exists b \in B : g(b) = c$.
f：全射なので、$\exists a \in A : f(a) = b$.
このとき、$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$.
従って、$g \circ f$：全射。

(3) ［反射律］$\forall f \in X$ を取る。
$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$M = 0$ （なんでもよい）とすれば、
$\forall x \geqslant M$ について $|f(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$.
従って、$f \sim f$.
［対称律］$\forall f, g \in X$ を取り、$f \sim g$ とする。
$\forall \varepsilon > 0$ をとる。
$f \sim g$ なので、$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \geqslant M : |f(x) - g(x)| < \varepsilon$.
このとき、（この M について）$\forall x \geqslant M$ に対し、
$|g(x) - f(x)| = |f(x) - g(x)| < \varepsilon$.
従って、$g \sim f$.
［推移律］$\forall f, g, h \in X$ を取り、$f \sim g$, $g \sim h$ とする。
$\forall \varepsilon > 0$ をとる。
$f \sim g$ なので、$\exists M_1 \in \mathbb{R} : \forall x \geqslant M_1 : |f(x) - g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
$g \sim h$ なので、$\exists M_2 \in \mathbb{R} : \forall x \geqslant M_2 : |g(x) - h(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
ここで、$M := \max\{M_1, M_2\}$ と取ると、

$\forall x \geqslant M$ に対し、($x \geqslant M_1, x \geqslant M_2$ であるから、)

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &= |(f(x) - g(x)) + (g(x) - h(x))| \\ &\leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ . \end{aligned}$$

従って、$f \sim h$.
以上より、$\sim$: X 上の同値関係。

$\boxed{2}$ (1) 固有値 1 の固有ベクトル ${}^t(0,1,-1)$, 固有値 2 の固有ベクトル ${}^t(1,-1,0)$, 固有値 3 の固有ベクトル ${}^t(1,-3,1)$

(2) $(a-b)(b-c)(c-a)$

(3) (i) $\forall u, v \in \mathbb{R}^3, \forall c \in \mathbb{R}$ に対して $f(u+v) = f(u) + f(v),\ f(cu) = cf(u)$ が成り立つこと.

(ii) $p, q, r \in \mathbb{R}$ に対して, $pv_1 + qv_2 + rv_3 = 0$ とすると, $0 = F(pv_1 + qv_2 + rv_3) = F^2(pv_1 + qv_2 + rv_3)$ より $0 = pav_1 + qbv_2 + rcv_3 = pa^2v_1 + qb^2v_2 + rc^2v_3$ となり,

$$(pv_1, qv_2, rv_3) \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = (0,0,0)$$

を得る. 仮定と (3) の結果よりこの行列は正則であるので、上式の両辺に右から逆行列をかけると $p = q = r = 0$ を得る.

(4) G を単射とする. $\forall x \in \mathrm{Ker}(G)$ について, $G(x) = 0_W$ である. $G(0_V) = 0_W$ と G の単射生より, $x = 0_V$ であるので、$\mathrm{Ker}(G) = \{0_V\}$ となる. 逆に, $\mathrm{Ker}(G) = \{0_V\}$ とする. $x, y \in V$ について $G(x) = G(y)$ とする. $0_W = G(x) - G(y) = G(x-y)$ より, $x - y \in \mathrm{Ker}(G) = \{0_V\}$ となり $x = y$ を得て, G の単射性がいえた.

$\boxed{3}$ (1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つような $N \in \mathbf{N}$ を ε に応じて取ることができる。

(2) 部分和数列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ が $n \to \infty$ で収束すること。

(3) 仮定より

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k$$

であり、右辺は $n \to \infty$ で収束するのでその極限値を S とすれば $b_k \geq 0$ より全ての $n \in \mathbf{N}$ に対して $\sum_{k=1}^{n} b_k \leq S$ が成り立っている。従って $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq S$ が全ての $n \in \mathbf{N}$ について成り立つ。つまり $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の部分和列は上に有界である。さらに全ての $k \in \mathbf{N}$ に対して $a_k \geq 0$ だから $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の部分和列は上に有界である。従って実数の連続性から $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束する。

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束するとはその部分和列が収束することなので、部分和列は十分大きな番号に対してはその差がいくらでも小さくなる。つまり、以下の命題 (P) が成り立つことである。

(P)

> 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、
> $$m > n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$
> が成り立つような $N \in \mathbf{N}$ を ε に応じて取ることができる。

そこで以下、(P) が成り立つことを示す。

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ が収束するので、上の言い換えにより

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$m > n \geq N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$$

が成り立つような $N \in \mathbf{N}$ を ε に応じて取ることができる。三角不等式

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$$

より、同じ ε と N に対して (P) が成り立つので、$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束することが示された。

(5) $k \geq 1$ なら $k^3 \geq 1$ すなわち $2k^3 - 1 \geq k^3$ が成り立つので、

$$\frac{k}{2k^3 - 1} \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$$

が成り立つ。$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ は収束する (広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ との比較で示される) ので、与えられた級数も収束する。

$\boxed{4}$ (1) 被積分関数を

$$g(z) = \frac{z}{z^2 + 2z - 2}$$

とおくと，$g(z)$ は $\alpha=\sqrt{3}-1$ と $\beta=-1-\sqrt{3}$ に 1 位の極をもつ有理関数であり，

$$g(z)=\frac{z}{z^2+2z-2}=\frac{z}{(z-\alpha)(z-\beta)}=\frac{z}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{z-\alpha}-\frac{1}{z-\beta}\right)$$
$$=\frac{z}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{z-\alpha}-\frac{1}{z-\beta}\right)$$

と表せるから，$g(z)$ の α,β における留数はそれぞれ
$\mathrm{Res}(g\,;\alpha)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$, $\mathrm{Res}(g\,;\beta)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$ である．
$R=1$ のとき，$C_R=C_1$ の内部に含まれる特異点は α のみであるから，留数定理より，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{z}{z^2+2z-2}\,dz=\mathrm{Res}(g\,;\alpha)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

$R=3$ のとき，$C_R=C_3$ の内部には α,β の両方の特異点が含まれるから，留数定理より，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_3}\frac{z}{z^2+2z-2}\,dz=\mathrm{Res}(g\,;\alpha)+\mathrm{Res}(g\,;\beta)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}=1$$

となる．

(2) 等式 $\dfrac{f(z)}{(z-\alpha)(z-\beta)}=\dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{f(z)}{z-\alpha}-\dfrac{f(z)}{z-\beta}\right)$ に注意すれば，与式の左辺は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(z)}{(z-\alpha)(z-\beta)}\,dz=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(z)}{z-\beta}\,dz\right)$$

と変形できる．$f(z)$ は $\mathbb{C}$ 上で正則で，α,β はともに C_R の内部にあるので，
この式にコーシーの積分公式を適用すれば，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz=f(\alpha),\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(z)}{z-\beta}\,dz=f(\beta)$$

が成り立つから，これを上の式の右辺に代入すると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(z)}{(z-\alpha)(z-\beta)}\,dz=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$$

が成り立つ．

(3) f が $\mathbb{C}$ 上正則で かつ 有界であると仮定する．すなわち，ある定数 $M > 0$ が存在して

$$|f(z)| \leq M \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

が成り立つとする．α, β を $\mathbb{C}$ 上の相異なる 2 点とする．$R > 0$ を $R > \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ を満たすようにとれば，α, β はともに円周 $C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ の内部にある．したがって，(2) で示した等式が適用できて，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(z)}{(z-\alpha)(z-\beta)}\,dz = \frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$$

が成り立つ．ゆえに

$$\left|\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(z)}{(z-\alpha)(z-\beta)}\,dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi R\cdot \frac{M}{(R-|\alpha|)(R-|\beta|)}$$
$$\leq \frac{MR}{(R-|\alpha|)(R-|\beta|)} \longrightarrow 0 \quad (R \to \infty)$$

となるから，

$$\alpha \neq \beta \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta} = 0$$

でなければならない．すなわち，任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $(\alpha \neq \beta)$ に対して $f(\alpha) = f(\beta)$ が成り立つので，f は定数関数である．したがって，リューヴィルの定理が証明された．

(4) 対偶を示す．$\overline{f(\mathbb{C})} \neq \mathbb{C}$ だとすると，$\exists\gamma \in \mathbb{C} - \overline{f(\mathbb{C})}$ であり，$\mathbb{C} - \overline{f(\mathbb{C})}$ は開集合であるから，これはある $\varepsilon > 0$ が存在して，任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$|f(z) - \gamma| \geq \varepsilon > 0$$

が成り立つことを意味する．したがって，$g(z) = \frac{1}{f(z)-\gamma}$ とおくと，これは全平面 $\mathbb{C}$ 上正則な関数となり，しかも

$$|g(z)| = \left|\frac{1}{f(z)-\gamma}\right| = \frac{1}{|f(z)-\gamma|} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

が任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して成り立つから，g は $\mathbb{C}$ 上有界である．したがって，リューヴィルの定理より，g は定数関数となるから，ある $c \in \mathbb{C}$ が存在して，$g(z) = \dfrac{1}{f(z)-\gamma} = c$ $(\forall z \in \mathbb{C})$ が成り立つ．ゆえに

$$f(z) = \gamma + \frac{1}{c} \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

となり，これは f が定数関数であることを意味する．よって対偶が示されたので (4) が証明された．

$\boxed{5}$ (1) 対応 $J \mapsto J/I$ は R の I を含むイデアル全体から R/I のイデアル全体への全単射になる．準同型定理から $(R/I)/(J/I) \cong R/J$ なので R/J が整域であることと $(R/I)/(J/I)$ が整域なことは同値．素イデアルとは剰余環が整域になるイデアルのことである．

(2) 前問から $(30, X^2+1) \subset M$ なる極大イデアルは剰余環 $\mathbb{Z}[X]/(30, X^2)$ の極大イデアルと一対一に対応する．剰余環 $\mathbb{Z}[X]/(30, X^2+1)$ を中国式剰余定理で分解して剰余環の極大イデアルをリストアップし、それらの逆像を作ることで以下の極大イデアルが求まる．

$$M_5 = (X+3, 5), \quad M_5' = (X+2, 5), \quad M_2 = (X+1, 2), \quad M_3 = (X^2+1, 3)$$

(3)

$$\mathbb{Z}[X]/M_5 = \mathbb{F}_5, \quad \mathbb{Z}/M_2 = \mathbb{F}_5, \quad \mathbb{Z}[X]/M_2 = \mathbb{F}_2, \quad \mathbb{Z}[X]/M_3 = \mathbb{F}_9$$

ただし，$\mathbb{F}_q$ は q 元体である．

２０２５年度大学院入試問題（２０２５年　２月　１６日実施）解答または解答例

理工学　専攻（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

試験科目：第　外国語（　）／専門科目（　理工基礎（物理学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

1

1. (1) 固有値: 4, 1(重根), 固有ベクトル: $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

   (2) $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

   (3) $\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$

2. $(a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)$

2

1. (1) 省略

   (2) 省略

2. (1) $\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-ma}$

   (2) $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$

3

以下では変数の上のドットは時間微分を表す

1. $m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x$
2. $A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$　(A, B は実数の任意定数)
3. $m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - 2m\gamma\dot{x}$,　$-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$
4. $A\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t) + B\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t)$　(A, B は実数の任意定数)
5. $(A+Bt)\mathrm{e}^{-\gamma t}$　(A, B は実数の任意定数)

$\boxed{4}$

1. 省略

2. $-2xyz+6x^2y^2z^2+c$ (c は定数)

3. (1) $\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)dV=\int_V \rho(\boldsymbol{r},t)dV$: ガウスの法則

(2) $\int_S \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{n}dS=\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{t}ds=0,\quad W=-q\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{t}ds=0$

(3) $\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS=0$: 磁荷の非存在

(4) $\int_S \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)dS=\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{t}ds,\ -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}dS=-\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS$
$\to -\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{t}ds=\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS$

(5) $\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$ 磁場が存在しないとき時間的に変動する電場は存在し得ない

$\boxed{5}$

1. (1) $\frac{\hbar\alpha}{m}\mid A\mid^2$

(2) $\frac{\hbar\alpha}{m}(\mid A\mid^2-\mid B\mid^2)$

(3) 0

2. (4) $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_1(x)=E\psi_1(x),\quad \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V_0\right)\psi_2(x)=E\psi_2(x)$

(5) $\alpha=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar},\quad \beta=\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$

(6) $\psi_1(0)=\psi_2(0),\quad \left.\frac{d\psi_1(x)}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{d\psi_2(x)}{dx}\right|_{x=0}$
$B_1=\frac{\alpha-i\beta}{\alpha+i\beta}A_1,\quad B_2=\frac{2\alpha}{\alpha+i\beta}A_1$

(7) $R=1,\quad T=0$

(8) 古典力学：完全に境界で反射，量子力学：領域2における粒子の存在確率は0ではないものの透過率が0であるため完全に透過することは不可.

6

1. 温度が定義できないもの: III, VI
   左から温度の高い順: V, VIII, IV, I, IX, II, V

2. (1) フェルミ統計, $S = 1/2$, 例) パウリ常磁性
   (2) ボース統計, $S = 0$, 例) 超流動
   (3) 古典統計, 孤立系, 例) キュリー磁性

3. (1) (a)〜(i) すべて．場合の数: 1 通り
   (2) 許されないもの無し．場合の数: すべて 1 通り
   (3) 許されないもの無し．場合の数: (a) から順に, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 6 通り．ボース統計の方が古典統計と比べ相対的に，複数の粒子が同一の準位に入る確率が高い．

理工学 専攻（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：専門科目 （ 理工基礎 （情報学基礎） ）

試験時間：（ １５０ ）分

1

(1) OS はコンピュータが動作するために必要な基本的なソフトウェアである。Windows などが挙げられる。アプリケーションプログラムは，ある特定の用途のためのソフトウェアである．Word などが挙げられる。

(2) CPU は少数の高性能なコアで構成される汎用的な処理装置である。GPU は多数のコアで構成される画像処理等に特化した処理装置である。

(3) Million Instructions Per Second の略で，1 秒間に何百万個の命令を実行できるかを示す。

(4) 組み合わせ回路 1 は x_1 と x_0 の二つの信号のどちらかを f により選択して出力するマルチプレクサとして用いられる。組み合わせ回路 2 は $a+b+c_i$ の加算結果 s とキャリー c_o が出力される。下の桁からの桁上がり c_i がある場合の 1 ビットの加算器として用いられる。

(5) F=0 の時には $S_1' S_0'$ は S_1S_0 となり，S_1S_0 は変化しない。F=1 の時には $S_1' S_0'$ は S_1S_0+ X_1X_0 となり，二つの 2 進数を加算した値が出力される。

2

(1)

(a) 9 字句解析 (b) 10 ソースコード (c) 12 トークン (d) 2 キーワード(予約語)
(e) 17 リテラル (f) 5 構文 (g) 7 構文木 (h) 8 コード

※ (d), (e)は逆でも OK

(2)

静的変数と自動変数について，それぞれの記憶領域が，いつ，どこに確保されるか，および，その値がいつまで保持されるかの違いを解答で説明する．

(3)

静的型付き言語の特徴として，変数の型がいつ決定されるのか，型の不一致がいつ検出されるかを説明し，その結果として開発や利用者に適しているかについてを解答で説明する．

(4)

中間言語について，従来のコンパイラ方式（機械語へ直接変換）およびインタプリタ方式（逐次解釈）と比較しながら，高級言語・中間言語・機械語（CPU）との関係と，仮想機械上でどのように実行されるかを解答で説明する．

3

この問題の意図は、主に次の２点である。

１．マクローリン展開の理解確認

解析的に積分できる関数 x^2をあえて数値的に近似させることで、台形公式の仕組み（$\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\Delta x$） を理解させること。

２．プログラムと数式の対応づけ

(−0.1)^i/i が

ruijou=ruijou*(-0.1);

goukei=goukei+ruijou/i;

に対応していることを読み取れるかを問うている。

単なる計算問題ではなく 「数式をプログラムに落とせるか」 を測ることが意図である。

(1)

log(1+x) ≈ x - x^2/2 + x^3/3

log(0.9) = log(1-0.1) より x = -0.1 を代入すると,

-0.1 - 0.005 - 0.000333333 = -0.105333333

(2)

log(0.9) = log(1-0.1) なので x = -0.1。

よって，累乗を作る部分を

ruijou = ruijou * (-0.1);

から

ruijou = ruijou * (0.1);

に書き換えればよい。

4

(1) $h(n)$ の z 変換を $H(z)$ とする.

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big(u(n) - u(n-N)\big) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot z^{-n} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-(N-1)} \\ &= \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \end{aligned}$$

となる.

(2) システムの周波数応答は $H(e^{j\omega})$ で与えられる.

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= \frac{\big(e^{\frac{1}{2}j\omega N} - e^{-\frac{1}{2}j\omega N}\big) e^{-\frac{1}{2}j\omega N}}{\big(e^{\frac{1}{2}j\omega} - e^{-\frac{1}{2}j\omega}\big) e^{-\frac{1}{2}j\omega}} \\ &= \frac{2j \sin \frac{N}{2}\omega}{2j \sin \frac{1}{2}\omega} e^{-\frac{1}{2}j\omega(N-1)} \\ &= \frac{\sin \frac{N}{2}\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega} e^{-\frac{1}{2}j\omega(N-1)} \end{aligned}$$

となる.

(3) システムの振幅特性 $A_N(\omega)$ は周波数特性の絶対値で与えられるから

$$A_N(\omega) = |H(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin \frac{N}{2}\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega} \right|$$

となる. ここで, 絶対値の中の分母・分子は $\omega = 0$ のとき共に 0 となる. また,

$$\frac{\big(\sin \frac{N}{2}\omega\big)'}{\big(\sin \frac{1}{2}\omega\big)'} = \frac{\frac{N}{2}\cos \frac{N}{2}\omega}{\frac{1}{2}\cos \frac{1}{2}\omega} = N\Big|_{\omega=0}$$

である. よって, ロピタルの定理より

$$\lim_{\omega \to 0} A_N(\omega) = N$$

となる.

5

(1) $f_1(n) = \log n$, $f_2(n) = 2^{\sqrt{\log n}}$, $f_3(n) = n + 10$, $f_4(n) = n(\log n)^2$, $f_5(n) = 2^n$, $f_6(n) = 100^n$ $f_7(n) = 2^{(2^n)}$ である。

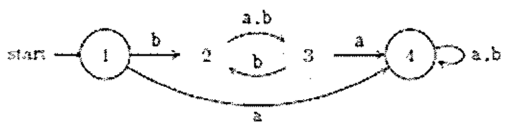
(2) (a) ここでは略解として，最短路長 $d\colon V(G) \to \mathbb{R}$ のみを出力するダイクストラ法 Dijkstra を記す。ダイクストラ法の時間複雑度は $\mathrm{O}(n^2)$ である。これは$\boxed{4}$が $\mathrm{O}(n)$ 回繰り返され，さらにその中の$\boxed{4.1}$と$\boxed{4.3}$のそれぞれが $\mathrm{O}(n)$ であることからわかる。

Dijkstra(G, c, s)

$\boxed{1}$ それぞれの頂点 $v \in V(G)$ に関して，$d(v)$ に ∞ を代入する。
$\boxed{2}$ $d(s)$ に 0 を代入する。
$\boxed{3}$ U に $V(G)$ を代入する。
$\boxed{4}$ U が空でない限り，以下の$\boxed{4.1}$$\boxed{4.2}$$\boxed{4.3}$を行う。
　$\boxed{4.1}$ 頂点 $u \in U$ のうち，$d(u)$ が最も小さい頂点を v とする。
　$\boxed{4.2}$ U から v を除去する。
　$\boxed{4.3}$ v の後続頂点それぞれの w に関して，もし $d(w) > d(v) + c(v, w)$ ならば，$d(w)$ に $d(v) + c(v, w)$ を代入する。
$\boxed{5}$ d を出力して終了する。

(b) 上記のダイクストラ法に，例えば入力として有向グラフ G ただし $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(G) = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)\}$ と辺費用 $c\colon E(G) \to \mathbb{R}$ ただし $c((1,2)) = 3$, $c((1,3)) = 2$, $c((2,3)) = -2$, $c((3,4)) = 1$ と始点 $s = 1$ を入力すると，頂点 4 への最短路長 $d(4)$ は正しく出力されない。正しい最短路長は $d(2) = 3$, $d(3) = 1$, $d(4) = 2$ であるが，辺 $(2,3)$ の費用が負であるために，$d(3) = 2$, $d(4) = 3$ と値が固定されたあとで $d(3) = 1$ と改めて更新されるためである。

(3) 例えば，下図が言語 L を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図である。また，この決定性有限オートマトンを 5 つ組 $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ で表



すと，$Q = \{1, 2, 3, 4\}$, $q_0 = 1$, $F = \{2, 3\}$ であり，状態遷移関数 δ は $\delta(1, \mathrm{a}) = 4$, $\delta(1, \mathrm{b}) = 2$, $\delta(2, \mathrm{a}) = 3$, $\delta(2, \mathrm{b}) = 3$, $\delta(3, \mathrm{a}) = 4$, $\delta(3, \mathrm{b}) = 2$, $\delta(4, \mathrm{a}) = 4$, $\delta(4, \mathrm{b}) = 4$ である。

6

(1) データベースにおけるトランザクションについて以下の設問に答えよ。

(a) トランザクションとはデータベースにおける複数の操作から構成された作業の論理単位。ユーザ側から見れば，ひとまとまりの処理単位。

(b) トランザクションが正常に終了（成功）すれば正しいデータとしてDBに反映→コミット

異常終了（失敗）したら：途中まで行われた処理はなかったことにする→トランザクション開始以前の状態に戻す→ロールバック

(2) データベースにおける正規化について以下の問いに答えよ。

(a) 正規化とは論理スキーマの設計段階で行われ、リレーショナルモデルのスキーマを整理する作業であるリレーションの属性の役割や属性間の関係を検討し、必要に応じて修正する作業。

(b) 正規化の目的：

- 更新時の異常を抑制することができる
- データを部品化することで冗長性がなくなる
- ユーザにわかりやすくする
- アプリケーションプログラムに依存しないDBを構築することができる
- データの更新、追加、削除操作におけるミスの発生を防ぐ
- 一つの事実を一意に表現する

(3)

シャーディング

データを複数のノードのディスクに分割配置することで、データベースへのリクエストを分散し全体のスループットを上げる手法。欠点として、特定のサーバへの負荷集中、一旦分割すると非分割状態に戻すのにコストがかかる可能性があること、メンテナンス、開発の難易度が高いこと、オートインクリメントやJOINが使えないことが挙げられる。

コンシステント・ハッシング

ノードとデータが同じリング上のある区間によって対応づけられる手法。メリットとして、データの割当先を自動で決定できる、データを均等に分散できる、再割り当てのコストが小さいことが挙げられる。デメリットとして、全体のノード数が少ないと各ノードにデータの偏りが出ることが挙げられるので、仮想ノードの利用によって偏りを小さくする対応法がある。

7

(1) $xy(1+x^2)y' = 1-y^2$

$1-y^2 \neq 0$のとき、$\frac{y}{1-y^2}y' = \frac{1}{x(1+x^2)}$から$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-y}-\frac{1}{1+y}\right)y' = \frac{1}{x}-\frac{x}{(1+x^2)}$

両辺を積分して$\ln|1-y^2| = \ln\left|\frac{1+x^2}{x^2}\right| + C$、$C$は任意の定数

$1-y^2 \neq 0$のとき$y = \pm 1$であり$y' = 0$で与式を満たすので、$y = \pm 1$も解

(2) $yy' = x\exp(x^2+y^2)$

$ye^{-y^2}y' = x\,e^{x^2}$

$y^2 = t, x^2 = u$とおくと、$\frac{dt}{dy} = 2y, \frac{du}{dx} = 2x$

$\int ye^{-t}\frac{1}{2y}dt = \int x\,e^u\frac{1}{2x}du$から$-\frac{1}{2}e^{-t} = \frac{1}{2}e^u + C_1$

$e^{-y^2} = -e^{x^2} + C_2$より$y^2 = -\ln\left(-e^{x^2}+C_2\right)$

ただし、C_2は任意の定数であり、$-e^{x^2}+C_2 > 0$

(3) $x^3y' + y^2 = 0$

$y \neq 0$のとき$\frac{1}{y^2}y' = -\frac{1}{x^3}$から$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2x^2} + C$

したがって、$y = -\frac{2x^2}{2x^2C+1}$　ただし、Cは任意の定数

また、$y = 0$の時与式を満たすので$y = 0$も解

(4) $(y-x)^2y' = 1$

$y-x = u$とおくと、$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1$から$u^2\left(\frac{du}{dx}+1\right) = 1$

(i) $1-u^2 \neq 0$のとき、$\frac{u^2}{1-u^2}\frac{du}{dx} = 1$より、$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}-2\right)du = x + C_1$

$\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| - 2u = 2x + C_2$なので、$\ln\left|\frac{1+y-x}{1-y+x}\right| - 2y = C_2$　ただし、C_2は任意の定数

(ii) $1-u^2 = 0$のとき、$y = x \pm 1$であり、これらも与式を満たすので解