理工学　専攻　領域（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

試験科目：第　外国語（　）／専門科目（理工基礎　（機械工学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

1

（1）

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - a & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - a \end{bmatrix}$$

の２行目の−1倍を１行目に足して、１倍を３行目に足すと以下が得られる。

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 1 - a)^2 (\lambda - a - 2)$$

$$\lambda_1 = a + 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = a - 1,$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix},$$

（2）

$$P^T C^2 P = P^T((a+3)I - A)P = (a+3)I - P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$P^T C^2 P = P^T C P P^T C P = \left(P^T C P\right)^2$$

Cが正定値なので、$P^T CP$の固有値はCと同じであって、すべて正であるので、

$$P^T C P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}P^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

（3）ケーリーハミルトンの定理により

$$A^5 - 3A^4 - 2A^3 + 3A^2 + I = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

2 (1)

制約条件 $yz+zx+xy=S$, よってラグランジュ関数を $L=xyz-\lambda(yz+zx+xy-S)$ とおくと, 極値の条件は,

$yz-\lambda(y+z)=0, zx-\lambda(z+x)=0, xy-\lambda(x+y)=0$ である. よって,

$(y-\lambda)(z-\lambda)=(z-\lambda)(x-\lambda)=(x-\lambda)(y-\lambda)=\lambda^2, x, y, z \neq \lambda$ であるので $x=y=z$.

このとき, $S=3x^2=3y^2=3z^2$ であるので, $x=y=z=\sqrt{\dfrac{S}{3}}$ となる.

理工学　専攻　領域（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：第　外国語　（　　　）／ 専門科目 （ 理工基礎　（機械工学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

2 (2)

$$\int_C \frac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1}dz$$

$$z^2-2\sqrt{2}z+1=0$$

$$z=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-4}}{2}$$

$$=\sqrt{2}\pm 1$$

$$\therefore z^2-2\sqrt{2}z+1=\left\{z-\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}\left\{z-\left(\sqrt{2}-1\right)\right\}$$

$$\int_C \frac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1}dz=\int_C \frac{1}{\left\{z-\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}\left\{z-\left(\sqrt{2}-1\right)\right\}}dz$$

$z=\sqrt{2}\pm 1$ に１位の極。

$|z|=1$ の内部にあるものは $\sqrt{2}-1$ である。留数を求めると

$$\lim_{z\to\sqrt{2}-1}\left\{z-\left(\sqrt{2}-1\right)\right\}\cdot\frac{1}{\left\{z-\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}\left\{z-\left(\sqrt{2}-1\right)\right\}}=\lim_{z\to\sqrt{2}-1}\frac{1}{z-\left(\sqrt{2}+1\right)}=-\frac{1}{2}$$

留数定理より

$$\int_C \frac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1}dz=2\pi i\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi i$$

理工学　専攻　領域（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：第　外国語　（　）／ 専門科目　（　理工基礎　(機械工学基礎)　）

試験時間：（　１５０　）分

$\boxed{2}$ (3)

$$4x^2y\frac{dy}{dx} = x(y^2+1)$$

$$\int \frac{4y}{(y^2+1)}dy = \int \frac{x}{x^2}dx$$

$$2\ln|y^2+1| = \ln|x| + C$$

$$\ln|y^2+1|^2 - \ln|x| = C$$

$\ln\left|\frac{(y^2+1)^2}{x}\right| = C$　→両辺にeを代入

$e^{\ln\left|\frac{(y^2+1)^2}{x}\right|} = e^C$　→ $e^C =$ A にする

$$\frac{(y^2+1)^2}{x} = A$$

$$\therefore y^2 = \sqrt{Ax} - 1$$

あるいは、$y(x) = \pm\sqrt{\sqrt{Ax} - 1}$

理工学専攻　領域（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

試験科目：第　外国語　（　）／専門科目（理工基礎　（機械工学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

2 (4)

①

分布関数の定義より

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

したがって密度関数$f(x)$は

$$\boxed{f(x)=F'(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}}$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_{0}^{\infty} x\left(-e^{-\lambda x}\right)' dx$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx=\int_0^{\infty}\left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)' dx=-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

②

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^{\infty} x^2(-e^{-\lambda x})'dx$$

$$=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} 2xe^{-\lambda x}dx=2\int_0^{\infty} x\left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)' dx$$

$$=-2x\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty}+\frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty}\left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)' dx=\frac{2}{\lambda}\left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)\Big|_0^{\infty}=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$\boxed{V(x)=E(x^2)-\{E(x)\}^2=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}}$$

理工学　専攻　領域（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：第　外国語　（　　　）／ 専門科目　（ 理工基礎　（機械工学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

3 (1)

$$+\circlearrowright \quad \sum \mathrm{M}_C = 0$$

$$F_{AB}\cos 30\,(100\cos 30) - F_{AB}\sin 30\,(100\sin 30)$$
$$-100\mathrm{N}\cos 60\,(175\sin 30) - 100\mathrm{N}\sin 60\,(175\cos 30) = 0$$
$$F_{AB} = 350\ \mathrm{N}$$

理工学　専攻　領域（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

試験科目：第　外国語（　）／専門科目（理工基礎　（機械工学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

3 (2)

慣性モーメントをI,回転角をθ,摩擦力を$f = \mu mgcos\phi$として並進回転の運動方程式を考えると,

$$m\ddot{x} = mgsin\phi - \mu mgcos\phi, \quad I\ddot{\theta} = \mu amgcos\phi$$

球の慣性モーメント $I = \frac{2}{5}ma^2$ である.
滑らずに回転するときは $x = a\theta$ が成り立つので,

$$mI\ddot{x} = mgI(sin\phi - \mu cos\phi), \quad maI\ddot{\theta} = \mu a^2m^2gcos\phi$$

$$mgI(sin\phi - \mu cos\phi) = \mu a^2m^2gcos\phi$$

$$I(sin\phi - \mu cos\phi) = \mu ma^2cos\phi$$

$$I(tan\phi - \mu) = \mu ma^2$$

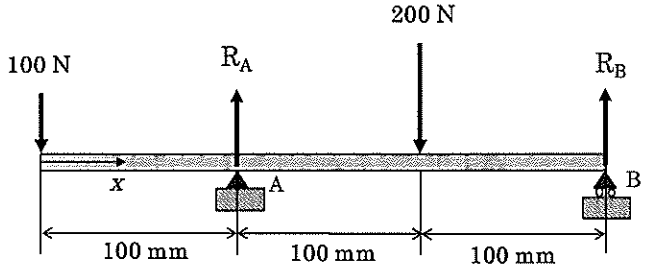
$$tan\phi = \mu(1 + \frac{ma^2}{I})$$

以上より，斜面の角度が $\phi = tan^{-1}(\frac{7}{2})\mu$ を超えると滑りはじめる.

4

【材料力学】

(1)



点 A, B での反力を R_A, R_B とする.

鉛直方向のつり合い：$R_A + R_B - 100 - 200 = 0 \;\Rightarrow\; R_A + R_B = 300$

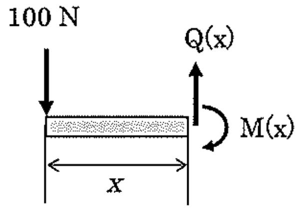
モーメントのつり合い（原点回り、時計回り正）：

$-R_A \times 100 + 200 \times 200 - R_B \times 300 = 0 \;\Rightarrow\; R_A + 3R_B = 400$

上記２式を R_A, R_B について解いて $\boxed{R_A = 250\ \text{N},\ R_B = 50\ \text{N}}$

(2)

$0 \le x \le 100$ の場合：位置 x における仮想断面におけるせん断力 Q(x), 曲げモーメント M(x)を記入

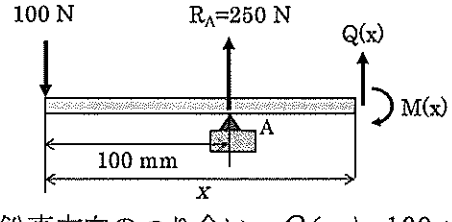


鉛直方向のつり合い：$Q(x) - 100 = 0$

モーメントのつり合い（原点回り、時計回り正）：$M(x) - Q(x) \times x = 0$

したがって $\boxed{Q(x) = 100, M(x) = 100x}$

$100 < x \le 200$ の場合：位置 x における仮想断面におけるせん断力 Q(x), 曲げモーメント M(x)を記入

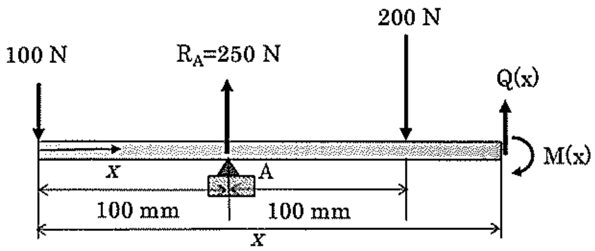


鉛直方向のつり合い：$Q(x) - 100 + 250 = 0$

モーメントのつり合い（原点回り、時計回り正）：$M(x) - Q(x) \times x - 250 \times 100 = 0$

したがって $\boxed{Q(x) = -150, M(x) = -150x + 25000}$

$200 < x \leq 300$：位置 x における仮想断面におけるせん断力 Q(x), 曲げモーメント M(x)を記入

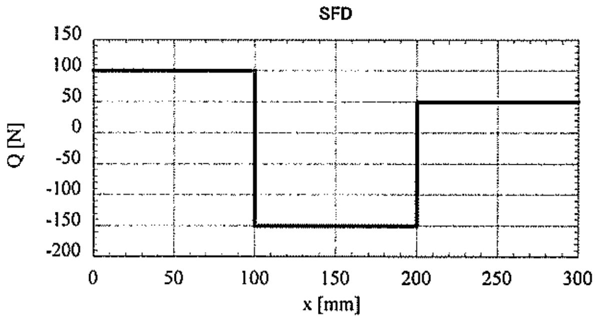


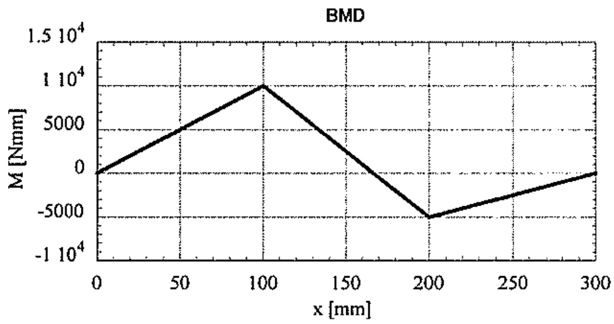
鉛直方向のつり合い：$Q(x)-100+250-200=0$

モーメントのつり合い（原点回り、時計回り正）：$M(x)-Q(x)\times x-250\times 100+200\times 200=0$

したがって $\boxed{Q(x)=50, M(x)=50x-15000}$

図示するとつぎのとおり.





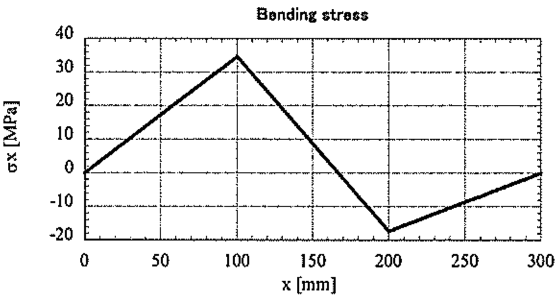
(3)

はりの断面二次モーメント I は $I=\dfrac{12\times 12^3}{12}=12^3=1728mm^4$

したがってはり上面曲げ応力分布は

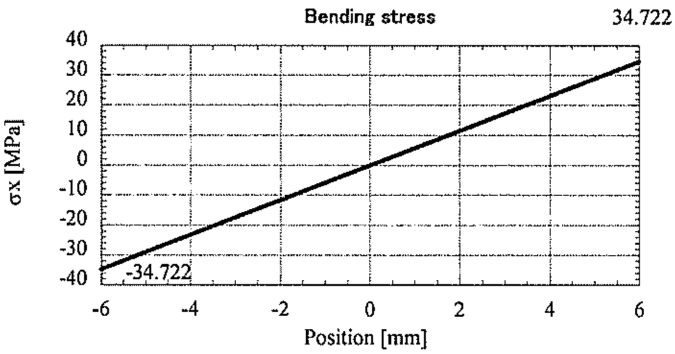
$$\boxed{\sigma(x)=\frac{M(x)}{I}\times 6=\frac{M(x)}{288}}$$

図示するとつぎのとおり.



(4)

最大曲げ応力発生位置は，$\boxed{x=100mm}$



理工学　専攻　領域（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

試験科目：第　外国語（　）／専門科目（　理工基礎　（機械工学基礎）　）

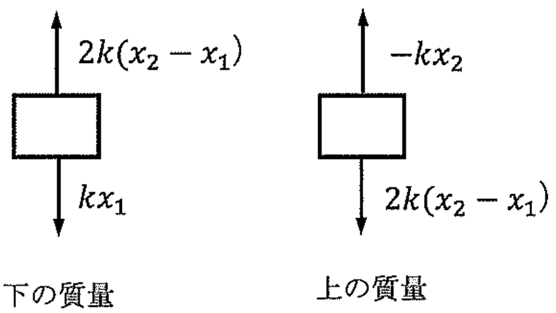
試験時間：（　１５０　）分

5

【機械力学】

（1）

フリーボディダイアグラムは以下のようになる．



運動方程式は以下のようになる．

$$m\ddot{x}_1 = -3kx_1 + 2kx_2$$
$$m\ddot{x}_2 = 2kx_1 - 3kx_2$$

（2）

固有値問題は以下の行列式で表すことができる．

$$det\begin{bmatrix} 3k - m\omega^2 & -2k \\ -2k & 3k - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

よって固有振動数は以下の通りになる．

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}},\quad \omega_2 = \sqrt{\frac{5k}{m}}$$

理工学　専攻　領域（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：第　外国語　（　　）／専門科目　（　理工基礎　（機械工学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

6

【熱工学】

(1)

ポリトロープ関係より，状態 1, 2 について

$$P_1 V_1^n = P_2 V_2^n$$

両辺の対数をとると

$$\ln P_1 + n \ln V_1 = \ln P_2 + n \ln V_2$$

n について整理して

$$n = \frac{\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}$$

(2)

準静的過程の境界仕事より

$$W_n = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV$$

ここで $PV^n = \mathrm{const}$より $P = CV^{-n}$（C は定数）とおく（$n \neq 1$）

$$P = CV^{-n} \qquad (n \neq 1)$$

したがって

$$W_n = \int_{V_1}^{V_2} C\, V^{-n}\, dV = \left[\frac{C}{1-n} V^{\,1-n}\right]_{V_1}^{V_2}$$

さらに $C = PV^n$ を用いて整理すると

$$W_n = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{1-n}$$

（3）

可逆断熱膨張はポリトロープの特別な場合であり，指数を $n = \kappa$ とみなせる．よって断熱膨張仕事は

$$W_{\mathrm{ad}} = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{1-\kappa}$$

したがって冷却損失は

$$W_{\mathrm{ad}} - W_n = (P_2V_2 - P_1V_1)\left(\frac{1}{1-\kappa} - \frac{1}{1-n}\right)$$

これを整理すると

$$W_{\mathrm{ad}} - W_n = \frac{\kappa - n}{(\kappa-1)(1-n)}(P_1V_1 - P_2V_2)$$

理工学　専攻　領域（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

試験科目：第　外国語（　）／専門科目（理工基礎　（機械工学基礎））

試験時間：（　１５０　）分

7

【流体工学】

水平管の位置を基準とすると，ベルヌーイの定理より，

$$\frac{v_i^2}{2}+\frac{p_i}{\rho}+gH=\frac{v_S^2}{2}+\frac{p_S}{\rho}=\frac{v_O^2}{2}+\frac{p_O}{\rho}-gh \quad (1)$$

タンクが十分に大きく，水面の降下速度を無視できるとすると $v_i \approx 0$.

水面および管出口は大気圧なので，$p_i = p_O = 0$.

以上より，

$$v_S=\sqrt{2\left(gH-\frac{p_S}{\rho}\right)} \quad (2)$$

連続の式より，

$$v_O=\frac{A_S}{A_O}v_S=\frac{2}{5}v_S \quad (3)$$

式(1), (2), (3)より

$$h=-\frac{1}{g}\left(\frac{v_S^2}{2}-\frac{v_O^2}{2}+\frac{p_S}{\rho}\right)$$

$$=-\frac{21}{25}H-\frac{4}{25}\frac{p_S}{\rho g}$$

$$=\frac{21}{25}\times 1.0-\frac{1}{6.25}\frac{-6.25\times 10^4}{1000\times 10}$$

$$=0.16$$

管が破損する恐れのある h の範囲は $h \geq 0.16[m]$

ベルヌーイの定理，連続の式が示されていれば，最終的な計算値が誤っていても部分点を与える．

理工学　専攻　領域（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：第　外国語（　　）／ 専門科目（ 理工基礎 （機械工学　基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

8

【精密工学】

(1)

$$\delta x = h \tan\theta \approx h\,\theta$$

微小角近似によると：

$$\tan\theta \approx \theta$$

ここで，$\theta = \alpha\Delta T$

$$\therefore \delta x \approx h\,\alpha\Delta T$$

(2)

相対誤差

$$\frac{|\delta x|}{x} \longrightarrow \frac{h\,\alpha\Delta T}{x}$$

誤差を 1% 以下（≤ 0.01）にするため

$$\frac{h\,\alpha\Delta T}{x} \leq 0.01$$

$$\therefore h = \frac{0.01\,x}{\alpha\Delta T}$$

理工学専攻　　領域（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

試験科目：第　外国語（　）／専門科目（　理工基礎　（機械工学　基礎））

試験時間：（　１５０　）分

9

【制御工学】

1.

（１）　特性方程式は

$$s^3+(2+10k)s^2+(0.25+80K)s+0.5=0$$

である。フルビッツ安定条件を適用すると

$$D_1=2+10K>0,\ D_2=(162.5+800K)K>0$$

を満足すればこのシステムは安定であることが分かる。すなわち、K>0 なら常に安定である。これを絶対安定であるという。

（２）定常偏差は $\lim_{s\to 0}(R(s)-\Theta(s))$で与えられる。

$R(s)=0$として$D(s)$=1/sに対する定常偏差を求める。

$$\lim_{s\to 0} s\frac{G_2(s)}{1+sG_1(s)G_2(s)}.\frac{1}{s}=G_2(s)=40$$

2.

1)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&-1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}4&5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}$$

よって、システムのダイナミックスは図２のようなブロック線図で表せる。

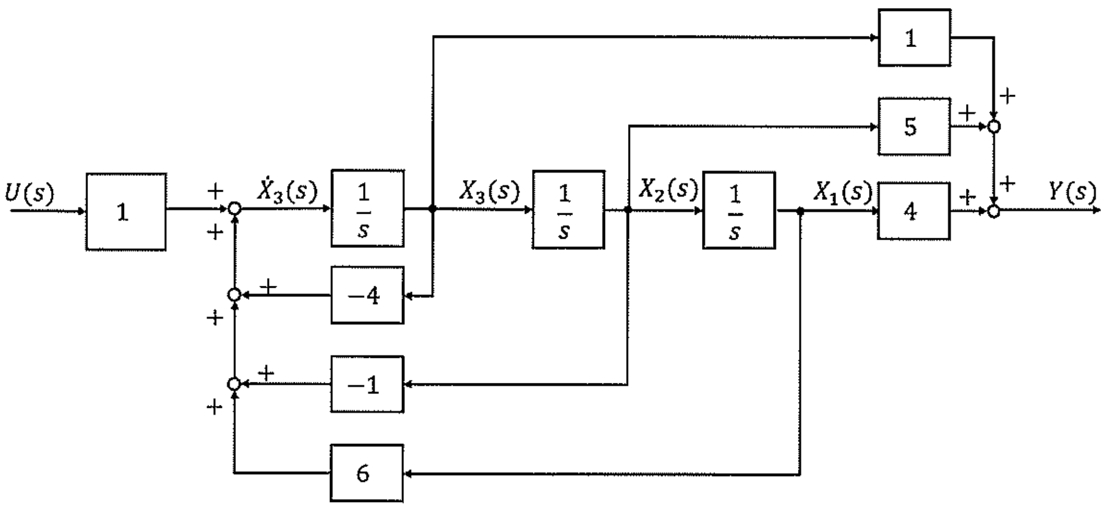


図２

2)

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -4\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ k=[k_1\quad k_2\quad k_3]$$

$$A-bk=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 6-k_1 & -1-k_2 & -4-k_3\end{bmatrix}$$

この行列の特性多項式は
$\lambda^3+(4+k_3)\lambda^2+(1+k_2)\lambda+(k_1-6)=0$
である。

指定したい閉ループ極が-2, -3, -4なので
$\lambda^3+9\lambda^2+26\lambda+24=0$
となればよいから、これより
$k_1=30,\ k_2=25,\ k_3=5$

理工学　専攻　領域（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

試験科目：第　外国語（　）／専門科目（　理工基礎　（機械工学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

10

【材料科学】

(1) 1050℃

(2) A 金属の原子

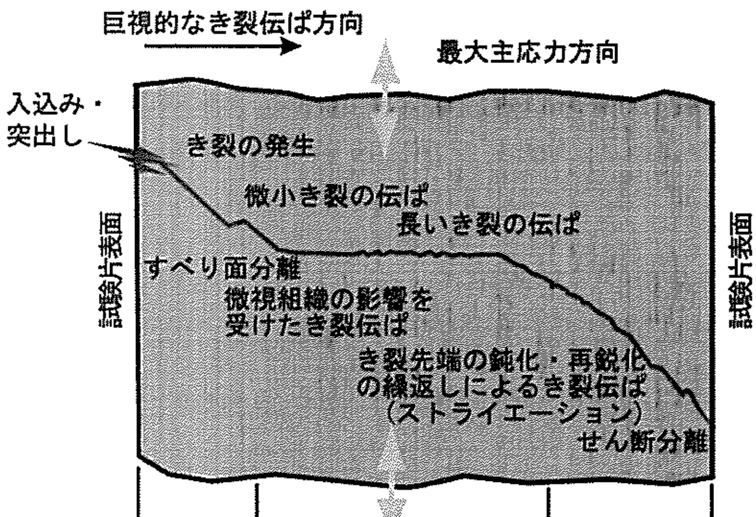
(3) L 相（液体）の割合：約 50%，S 相（固溶体）の割合：約 50%

(4) 回答例

延性破壊：大きな伸びと絞りによる安定的な変形を生じ，結晶学的にはすべり面で破壊が進行し，破断面は光沢のない灰色の破面を示す．

脆性破壊：大きな塑性変形を生じない不安定破壊がへき開面で生じ，破断面は金属光沢のある平滑面を示す．

(5)



平滑材のき裂発生と進展の説明図の一例

理 工 学　専攻　（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

試験科目：第　外国語（　　）／ 専門科目（ 理工基礎（電気・電子工学基礎））

試験時間：（　１５０　）分

1

(1) (a) $y(x) = \frac{1}{1+(1/y_0-1)\exp(-x)}$　(b) $y = \frac{1}{3}\exp(2x) + \frac{2}{3}\exp(-x)$

(2) (a) $\lambda = 3, v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$　$\lambda = 1,\ v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$　(b) $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix},\ \Lambda = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

(c) $Q^TQ = I$であるから $A^n = (Q\Lambda Q^T)^n = Q\Lambda^n Q^T$

(3) (a) $\sum_{k=0}^{m-1} z^k = \frac{1-z^m}{1-z}$　(b) (a)の答えに$z = \exp(2\pi ki/m)$を代入すると、分子は$1-[\exp(2\pi i)]^k = 0$

2

(1) 面密度$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_1 r_2 Q}{(\varepsilon_1 r_2+\varepsilon_2 r_1)S}$

(2) (a) $E_1 = \frac{r_2 Q}{(\varepsilon_1 r_2+\varepsilon_2 r_1)S}$,　x軸負の向き　(b) $E_1 = \frac{r_1 Q}{(\varepsilon_1 r_2+\varepsilon_2 r_1)S}$,　x軸正の向き

(3) 電位分布 $V = \frac{r_2 Qx}{(\varepsilon_1 r_2+\varepsilon_2 r_1)S}$

(4) 全体の静電容量 $C = \frac{(\varepsilon_1 r_2+\varepsilon_2 r_1)S}{r_1 r_2}$

(5) 全体の静電エネルギー $U = \frac{r_1 r_2 Q^2}{2(\varepsilon_1 r_2+\varepsilon_2 r_1)S}$

3

(1) $dI = \frac{\omega\lambda ds}{2\pi}$

(2) $dB_r = \frac{\mu_0}{8\pi^2}\omega\lambda\frac{z_0}{\left(\sqrt{a^2+z_0^2}\right)^3}ds$　+r 方向　$dB_z = \frac{\mu_0}{8\pi^2}\omega\lambda\frac{a}{\left(\sqrt{a^2+z_0^2}\right)^3}ds$　+z 方向

(3) $B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\omega\lambda\frac{a^2}{\left(\sqrt{a^2+z_0^2}\right)^3}$　+z 方向

4

(1) $\beta = \beta_1 + \beta_2(\beta_1 + 1)$

(2) (a) V_i/R_1　右から左へ　(b) R_2V_i/R_1　右が高電位　(c) 90 kΩ

5

(1) ある定常状態から別の定常状態に移るまでの途中に生じる電圧，電流，電力などの時間的な変化

(2) $0 \le t < t_1$では$v_{R_1}(t) = \frac{E}{R_1+R_2}\left(R_1 + R_2 e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\right)$　$t_1 \le t$では$v_{R_1}(t) = -\frac{R_2E}{R_1+R_2}e^{-\frac{(t-t_1)}{R_1C}}$

(3) 等しくなる時刻は $\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}\ln\frac{2R_1+R_2}{R_1}$

等しくなる時刻は，電源電圧に依存せず回路素子の定数のみで決まる

(4) (2)で得られた関数に従い，$0 \le t < t_1$ではEから負の指数特性で減少し，

$t_1 \le t$では$-\frac{R_2E}{R_1+R_2}$から正の指数特性で増加する波形を描けばよい

6

(1) 一方のコイルで発生した磁束のうち，どれだけの磁束が他方のコイルに鎖交しているかを示す指標

(2) $L_1 = 10$ H　$L_2 = 10/3$ H　$C = 1/10$ F

(3) 250 W

理工学　専攻（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：第　外国語　（　）　／　専門科目　（　理工基礎　（化学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

1 次の問 1, 2 に答えよ。

問 1 初期温度 500 K，初期圧力 3.00 atm のヘリウム 2.00 mol を膨張させ，初期体積の 3.00 倍にした。1)～3)に答えよ。

1) ヘリウムを初期状態から圧力一定のまま膨張させた。この変化によりヘリウムが外界にした仕事（$-W_1$）を求めよ。（8 点）

（解）$-dW = pdV$ であるから，p 一定のもとでは

$$-W_1 = p_0\int_{V_0}^{3V_0} dV = p_0(3V_0 - V_0) = 2p_0V_0$$

ここで完全気体の状態方程式より，$p_0V_0 = nRT_0$ であるから

$$-W_1 = 2p_0V_0 = 2nRT_0 = 2\times 2.00\,\mathrm{mol}\times 8.314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}mol^{-1}}\times 500\,\mathrm{K}=1.66\times 10^4\,\mathrm{J}$$（答）

2) ヘリウムを初期状態から等温可逆的に膨張させた。このときの気体の圧力（p）と体積（V）との関係は式(1)（Boyle の法則）で与えられる。

$$pV = p_0V_0 = Const. \qquad (1)$$

この変化によりヘリウムが外界にした仕事（$-W_2$）を求めよ。（8 点）

（解）$-dW = pdV$，T 一定のもとでは $pV = p_0V_0 = Const$ であるから

$$-W_2 = \int_{V_0}^{3V_0} pdV = p_0V_0\int_{V_0}^{3V_0}\frac{dV}{V} = nRT_0\int_{V_0}^{3V_0}\frac{dV}{V} = nRT_0\ln 3$$

$$=2.00\,\mathrm{mol}\times 8.314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}mol^{-1}}\times 500\,\mathrm{K}\times \ln 3=9.13\times 10^3\,\mathrm{J}$$（答）

3) ヘリウムを断熱可逆的に膨張させた。このときの気体の圧力（p）と体積（V）との関係は式(2)（Poission の式）で与えられる。

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma = Const. \qquad (\gamma:\text{比熱比}) \qquad (2)$$

この変化によりヘリウムが外界にした仕事（$-W_3$）は，$-W_2$ に比べて大きいか，それとも小さいか。式(1), (2)を用いた熱力学的根拠を添えて答えよ。（根拠の説明には図等を用いてもよい。また，上記の条件で実際に$-W_3$ を計算して比較してもかまわない。）（10 点）

（解）小さい。理由：気体の p-V 線図は，断熱可逆変化では式(2)，等温可逆変化では式(1)によりそれぞれ描かれる。ここで，γ は比熱比であり，常に 1 よりも大きい（ヘリウムのような単原子分子では$\gamma = 1.667$）。初期状態 p_0, V_0 の気体が膨張するとき，それぞれの p-V 線図は次の図のようになり，膨張途中および膨張後の気体の圧力は，同体積においては断熱可逆変化が等温可逆変化よりも常に小さくなる。よって，p-V 線図の面積に対応する気体がする仕事は，断熱可逆変化（$-W_3$，青枠面積）の方が等温可逆変化（$-W_2$，赤枠面積）よりも小さくなる。

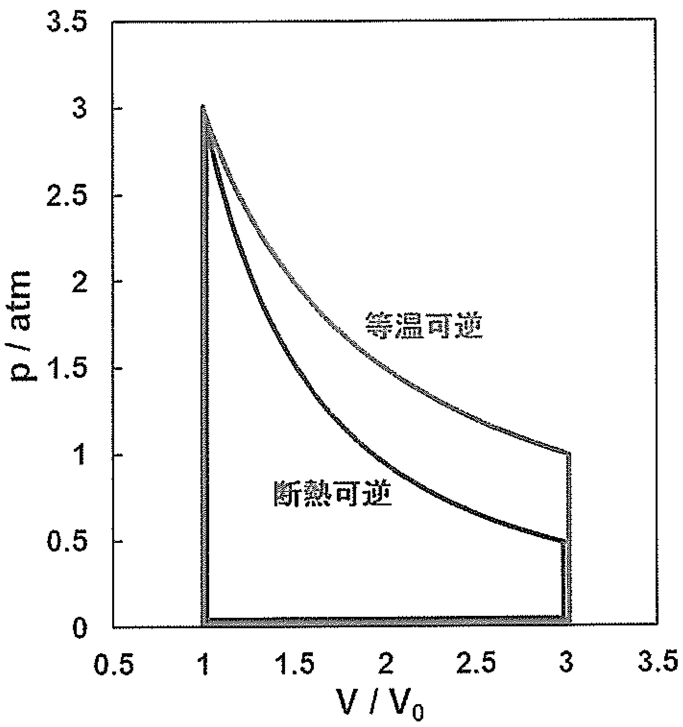


図 A-1. p-V 線図

問 2　図 1 は H_2O の状態図を示している。1)～3)に答えよ。

1)　図 1 に示された領域 a, b, c は，それぞれどのような相（気相，液相，固相，超臨界状態など）か答えよ。（6 点）

（解）領域 a：固相，領域 b：気相，領域 c：液相（答）

2)　図 1 に示された点α を何というか。また，点α の自由度を Gibbs の相律を用いて求めよ。（8 点）

（解）三重点。固相，液相，気相の 3 相が共存している状態。p(相の数)=3，c(成分の数)=1 であるから，Gibbs の相律より自由度fは

$$f = c - p + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

となり，ゼロである。すなわち，三重点は温度，圧力どちらも一義的に決まってしまう。

3)　相境界における圧力の温度依存性は Clapeyron の式(3)で与えられる。

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H_{\mathrm{tr}}}{T\Delta v_{\mathrm{tr}}} \qquad (3)$$

P：圧力，　　T：絶対温度

ΔH_{tr}：相変化に伴うエンタルピー変化，Δv_{tr}：相変化に伴うモル体積の変化

液体 H_2O と固体 H_2O の密度はどちらが大きいか。図 1 と式(3)を用いて説明せよ。（10 点）

（解）固－液相線は，状態図における領域 a と領域 c との境界線であり，その傾きより $dP/dT<0$ である。したがって，式(3)は

$$\frac{\Delta H_{\mathrm{tr}}}{T\Delta v_{\mathrm{tr}}} < 0 \qquad (\text{A-1})$$

となる。ここで，$\Delta H_{\mathrm{tr}} > 0$，$T > 0$ であるから，式(A-1)より

$$\Delta v_{tr} = v_l - v_s = M\left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_s}\right) < 0 \qquad \text{(A-2)}$$

M: H_2O のモル質量　　ρ: H_2O の密度

したがって，

$$\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_s} < 0 \qquad \rightarrow \qquad \rho_l > \rho_s$$ （答）

理工学　専攻（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

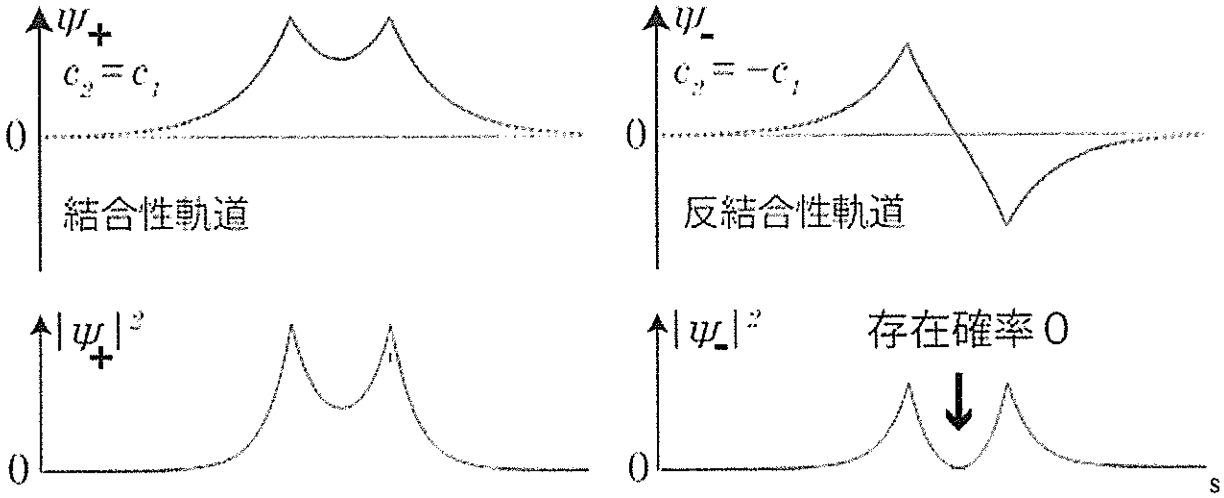
試験科目：第　外国語　（　　　　）／ 専門科目　（　理工基礎　（化学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

解答

2

問 1（25 点）



分子軌道 Ψ_+（結合性軌道）は，２つの原子間の波動関数の値は重ね合わされて大きくなり，水素原子間に電子波動関数あるいは電子密度が存在することから結合性軌道を示す。一方，分子軌道 Ψ_-（反結合性軌道）は，２つの原子軌道間で符号が逆転しているために原子の間で電子の存在確率が０になる場所が存在するため，波動関数の値あるいは密度がゼロとなることから結合を作らない反結合性軌道を示す。

問 2（25 点）

$$
\begin{aligned}
\int \Psi_+ \Psi_- \, d\tau &= \frac{1}{\sqrt{2(1+S)}} \int (\chi_a + \chi_b) \times \frac{1}{\sqrt{2(1-S)}} (\chi_a - \chi_b) \, d\tau \\
&= \frac{1}{\sqrt{2(1+S)}} \frac{1}{\sqrt{2(1-S)}} \int (\chi_a + \chi_b)(\chi_a - \chi_b) \, d\tau \\
&= \frac{1}{2\sqrt{(1-S^2)}} \left\{ \int \chi_a \chi_a d\tau - \int \chi_a \chi_b d\tau + \int \chi_b \chi_a d\tau - \int \chi_b \chi_b d\tau \right\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{(1-S^2)}} \{ 1 - S + S - 1 \} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって，値がゼロとなり，分子軌道 Ψ_+ と分子軌道 Ψ_- は直交していることが示された。

理工学　専攻（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：第　外国語（　　）／ 専門科目（ 理工基礎　（化学基礎） ）

試験時間：（　１５０　）分

3　次の問 1～問 3 に答えよ。解答の計算式や説明は途中過程を省略せずに記述せよ。なお，ことわりの無い限り溶液温度は 298 K とする。

問1　8.00×10^{-2} mol dm^{-3} のアンモニア NH_3 水溶液 0.500 dm^3 と 4.00×10^{-2} mol dm^{-3} の塩化水素 HCl 水溶液 0.500 dm^3 を混合して体積 1.000 dm^3 の水溶液を調製した。この水溶液における水素イオン濃度[H^+]を有効数字 2 桁で求めよ。

なお解答の際にはアンモニウムイオン NH_4^+ の酸解離定数（K_a）および水 H_2O の解離定数（K_w）をそれぞれ $K_a = 5.62\times10^{-10}$ mol dm^{-3} および $K_w = 1.00\times10^{-14}$ mol^2 dm^{-6} として計算せよ。解答の過程において，各溶液における「化学平衡」，「物質収支」，「溶液のイオン的中性」の関係を表す式を必ず明記せよ。近似を使用する場合は必ずその過程を説明すること。

混合溶液中の成分濃度は以下の通りである。

$$c_{NH3} = (8.00\times10^{-2}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}} \times 0.500\ \mathrm{dm^3}) / (1.000\ \mathrm{dm^3}) = 4.00\times10^{-2}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}}$$

$$c_{HCl} = (4.00\times10^{-1}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}} \times 0.500\ \mathrm{dm^3}) / (1.000\ \mathrm{dm^3}) = 2.00\times10^{-2}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}}$$

化学平衡：

$$K_a = \frac{[NH_3][H^+]}{[NH_4^+]} = 5.62\times10^{-10}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}} \quad (1\text{-}1)$$

$$K_w = [H^+][OH^-] = 1.00\times10^{-14}\ \mathrm{mol^2\ dm^{-6}} \quad (1\text{-}2)$$

物質量収支：

$$c_{NH3} = [NH_4^+] + [NH_3] = 4.00\times10^{-2}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}} \quad (1\text{-}3)$$

$$c_{HCl} = [Cl^-] = 2.00\times10^{-2}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}} \quad (1\text{-}4)$$

溶液のイオン的中性：

$$[H^+] + [NH_4^+] = [OH^-] + [Cl^-] \quad (1\text{-}5)$$

強酸（塩酸）と過剰量の弱塩基（アンモニア）の混合物は弱塩基性であることから，[H^+]と[OH^-]の大きさは[NH_4^+]や[Cl^-]と比較して極めて小さいため，(1-5)式ではそれらを無視することで以下のように近似する。

$$[NH_4^+] = [Cl^-] \quad (1\text{-}5)'$$

(1-5)'式および(1-4)式より

$$[NH_4^+] = [Cl^-] = 2.00\times10^{-2}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}} \qquad (1\text{-}4)'$$

(1-3)式および(1-4)'式より

$$[NH_4^+] + [NH_3] = 2.00\times10^{-2}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}} + [NH_3] = 4.00\times10^{-2}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}}$$

$$[NH_3] = 2.00\times10^{-2}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}} \qquad (1\text{-}3)'$$

(1-3)'式および(1-4)'式を(1-1)式に代入する。

$$\frac{[NH_3][H^+]}{[NH_4^+]} = \frac{(2.00\times10^{-2}\mathrm{mol\ dm^{-3}})[H^+]}{(2.00\times10^{-2}\mathrm{mol\ dm^{-3}})} = 5.62\times10^{-10}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}} \qquad (1\text{-}1)'$$

となる。

従って水素イオン濃度$[H^+]$は，

$$[H^+] = 5.62\times10^{-10}\mathrm{mol\ dm^{-3}} \times \frac{(2.00\times10^{-2}\mathrm{mol\ dm^{-3}})}{(2.00\times10^{-2}\mathrm{mol\ dm^{-3}})}$$

$$= 5.62\times10^{-10}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}}$$

→ 設問の条件における水素イオン濃度$[H^+] = 5.6\times10^{-10}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}}$

問 2　下記の a)と b)に対して塩化銀 AgCl を飽和となるように溶解させた。AgCl を溶解させた水溶液について次の(1)と(2)に答えよ。

a) 純水　　b) $0.30\times10^{-2}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}}$ の硝酸銀 $AgNO_3$ が溶解した水溶液

(1) 両者の水溶液における塩化物イオン濃度$[Cl^-]$の大小関係を予想せよ。

(2) b)に AgCl を溶解させた水溶液について，$[Cl^-]$を有効数字 2 桁で求めよ。
解答の際には AgCl の溶解度積を $K_{sp,AgCl} = 1.78\times10^{-10}\ \mathrm{mol^2\ dm^{-6}}$ として計算せよ。近似を使用する場合は必ずその過程を説明すること。

→ 正解：$[Cl^-]$の大小関係：(1)＞(2)
(2) $[Cl^-] = 1.7\times10^{-8}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}}$

溶解度積　$K_{sp,AgCl} = [Ag^+][Cl^-] = 1.78\times10^{-10}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}}$　(2-1)

(1)と(2)を比較した場合、“共通イオン効果”により(1)＞(2)であることが予想できる（または実際の濃度計算でこれらの関係も求めても良い）。

AgCl の飽和溶解により生じる Ag^+の量は $AgNO_3$ 水溶液中に元から存在する Ag^+の量と比較して極小である。従って飽和溶解後の溶液における$[Ag^+]$は溶解前の初期濃度（$1.00\times10^{-2}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}}$）で近似することが可能である。

$[Ag^+] = 1.00\times10^{-2}\ \mathrm{mol\ dm^{-3}}$　(2-1)

$K_{sp,AgCl} = [Ag^+][Cl^-]$

$= (1.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol\,dm^{-3}})[\mathrm{Cl^-}] = 1.78\times10^{-10}\,\mathrm{mol\,dm^{-3}}$　　(2-2)

従って　$[\mathrm{Cl^-}] = \frac{(1.78\times10^{-10}\,\mathrm{mol\,dm^{-3}})}{(1.00\times10^{-2}\,\mathrm{mol\,dm^{-3}})} = 1.78\times10^{-8}\,\mathrm{mol\,dm^{-3}}$

問 3　硫酸亜鉛 $ZnSO_4$ 水溶液に亜鉛 Zn の金属板を浸した電極 $Zn\,|\,Zn^{2+}$を，水素電極 $Pt, H_2\,|\,H^+$ と組み合わせて電池を作製した。この電池について次の(1)～(3)に答えよ。

なお解答の際には各電極の標準酸化還元電位をそれぞれ $E^\circ_{H+,H2} = 0.000$ V および $E^\circ_{Zn2+,Zn} = -0.763$ V とし，いずれの溶液も溶質の活量係数$\gamma = 1$ として計算せよ。298 K において$(RT/F)\log_e 10$ (R：気体定数, T：電極温度, F：ファラデー定数) は 0.059 V とする。

(1)　各電極上で生じる半反応の化学式を電極の極性（正極／負極）とともにそれぞれ示せ。

(2)　次の条件下における電池の起電力を有効数字 2 桁で求めよ。

・電解質濃度：　$[H^+] = 1.00 \times10^{-1}$ mol dm^{-3},　$[Zn^{2+}] = 1.00 \times10^{-2}$ mol dm^{-3}

・H_2 分圧：　$P_{H2} = 1.00$ atm

(3)　(2)の条件から H_2 分圧を低減させた際の起電力の変化について，ネルンスト式を用いて説明せよ。

(1) 半反応式：　$2\,H^+ + 2\,e^- \rightleftarrows H_2$　（正極　$Pt, H_2\,|\,H^+$）

$Zn^{2+} + 2\,e^- \rightleftarrows Zn$　（負極　$Zn\,|\,Zn^{2+}$）

(2) ネルンスト式：　$E_{H^+,H_2} = E^\circ_{H^+,H_2} + \frac{RT}{2F}\ln\left(\frac{[H^+]^2}{P_{H_2}}\right)$

$$E_{Zn^{2+},Zn} = E^\circ_{Zn^{2+},Zn} + \frac{RT}{2F}\ln\left(\frac{[Zn^{2+}]}{1}\right)$$

起電力：$\Delta E = E_{H^+,H_2} - E_{Zn^{2+},Zn}$

$$= E^\circ_{H^+,H_2} + \frac{RT}{2F}\ln\left(\frac{[H^+]^2}{P_{H_2}}\right) - \left\{E^\circ_{Zn^{2+},Zn} + \frac{RT}{2F}\ln\left(\frac{[Zn^{2+}]}{1}\right)\right\}$$

$$= E^\circ_{H^+,H_2} - E^\circ_{Zn^{2+},Zn} + \frac{RT}{2F}\ln\left(\frac{[H^+]^2}{P_{H_2}}\right) - \frac{RT}{2F}\ln\left(\frac{[Zn^{2+}]}{1}\right)$$

$$= E^\circ_{H^+,H_2} - E^\circ_{Zn^{2+},Zn} + \frac{RT}{2F}\ln\left(\frac{[H^+]^2}{P_{H_2}[Zn^{2+}]}\right)$$

$$= 0.000 - (-0.763) + \frac{1}{2}\times 0.059 \times \log\left\{\frac{(1.00\times10^{-1})^2}{1.00\,(1.00\times10^{-2})^2}\right\}$$

$$= 0.000 - (-0.763) + \frac{1}{2}\times 0.059 \times \log\left\{\frac{(1.00\times10^{-1})^2}{1.00\,(1.00\times10^{-2})^2}\right\}$$

$$= 0.763 + \frac{1}{2}\times 0.059 \times \log(10^2) = 0.822\ \mathrm{V}$$

→ 設問の条件における起電力$\Delta E = 0.82$ V

(3) (1)で示した起電力の式より

起電力：$\Delta E = E^{\circ}_{H^+ H_2} - E^{\circ}_{Zn^{2+} Zn} + \frac{RT}{2F}\ln\left(\frac{[H^+]^2}{P_{H_2}[Zn^{2+}]}\right)$

$$= 0.763 + \frac{1}{2} \times 0.059 \times \log\left\{\frac{[H^+]^2}{P_{H_2}[Zn^{2+}]}\right\}$$

P_{H2} を低減させた場合は右式における第二項の値が増大するため，起電力ΔE の増大が予想できる。

以上

理工学　専攻（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

試験科目：第　外国語（　）／専門科目（理工基礎　（化学基礎））

試験時間：（　１５０　）分

4　次の問 1～問 4 に答えよ。解答の計算式や説明は途中過程を省略せずに記述せよ。それぞれの説明には補足図を用いてもよい。

問1　金属元素 Na, Mg, Al について，これらの元素を第一イオン化エネルギーの高い順に並べよ。あわせて，その順列を選択した理由を各元素の電子配置に基づき説明せよ。

Mg＞Al＞Na

・同一周期の元素の第一イオン化エネルギーを比較した場合、基本的には原子番号が大きな原子ほど有効核電荷の影響を強く受けることになるため第一イオン化エネルギーが増大する傾向にある。

・一方、Al のような ns^2np^1 の電子配置を持つ元素では s 軌道の貫入により核電荷が遮蔽されるため、p 軌道の電子を除去することが容易となり、結果として隣接する ns^2np^0 の電子配置を持つ元素（＝Mg）よりも第一イオン化エネルギーが低減する。

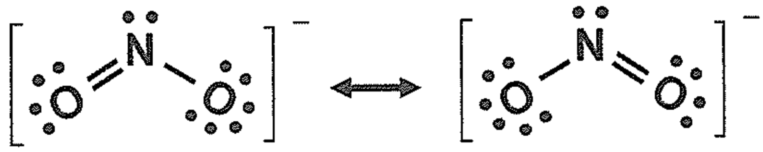
上述する二項目より Mg＞Al＞Na の関係が成立する。

問 2　多原子イオン NO_2^- について，次の(1)と(2)に答えよ。

(1) 分子のルイス構造を示せ。共鳴構造が存在する場合にはそれらの存在を明示すること。

(2) 原子価殻電子対反発（VSEPR）理論に基づき分子の幾何構造を予想せよ。

(1) 図示による解答例：



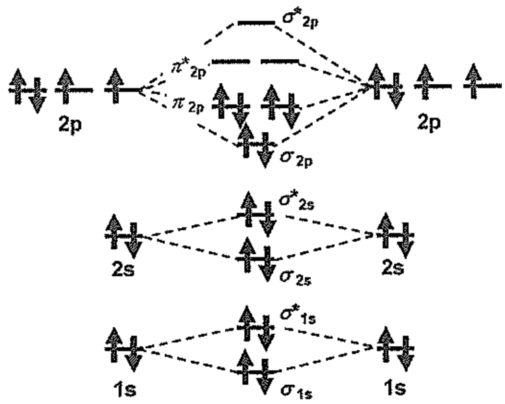
(2) 中央の N 原子は二つの結合と一つの孤立電子対に関わっている。これらの結合と孤立電子対は互いに反発するため、この分子は三角形型の構造から一つの原子を欠いた“折れ線型”の幾何構造を形成することになる。

問3　多原子分子 O_2 および多原子イオン O_2^{2-} について，次の(1)と(2)に答えよ。

(1) O_2 について，分子軌道理論によるエネルギー準位図を描写せよ。

(2) O_2 および O_2^{2-} について，結合次数を求め，両者における結合エネルギーの大小関係を予測せよ。

(1) 図示による解答例：



(2) 上図より、O_2 では結合性軌道の電子は 10 個、反結合性軌道の電子は 6 個であるため、結合次数は（10-6）/2 ＝2 となる。

一方、O_2^{2-} では結合性軌道の電子は 10 個、反結合性軌道の電子は 8 個であるため、結合次数は（10-8）/2 ＝1 となる。

多原子分子やイオンでは結合次数の高い結合ほど結合エネルギーが大きくなるため、結合エネルギーの大小関係は　O_2 ＞ O_2^{2-} となることが予測できる。

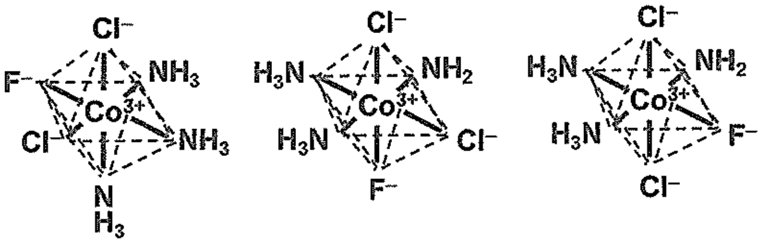
問4　六配位八面体型錯体または錯イオンについて，次の(1)と(2)に答えよ。

(1) 金属錯体 $[CoCl_2F(NH_3)_3]$ について，存在する異性体の構造をすべて図示せよ。光学異性があればそれらを示すこと。

(1) 化合物 $Na_3[FeF_6]$ について，錯イオンの中心金属である Fe(III)の電子配置の状態について結晶場分裂による d 軌道のエネルギー準位図を用いて説明せよ。なお，Fe の原子番号は 26 であり，錯イオン $[FeF_6]^{3-}$ は弱い場の配位子により形成された高スピン錯体であるものとする。

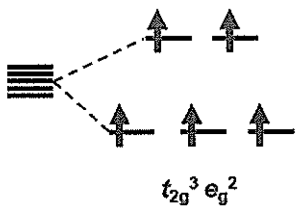
(1) 三種類の異性体が存在する。（光学異性は存在しない）

図示による解答例：



(2) 設問の条件より d^5 電子配置の中心金属が形成する八面体型錯体（高スピン型）を想定することになり，結晶場分裂より生じた二種類の軌道（t_{2g} および e_g）のそれぞれ個別に対して一つの電子が平行スピン状態で配置される

図示による解答例：



以上

２０２６年度大学院入試問題（２０２６年　２月１５日実施）　解答または解答例

理工学　専攻（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：第　外国語（　　）／ 専門科目（ 理工基礎 （化学基礎） ）

試験時間：（ １５０ ）分

5 緑の()は教科書「ボルハルト・ショアー　現代有機化学」の対応する箇所です。

問１．　配点 1) 4 点、2) 4 点、3) 4 点

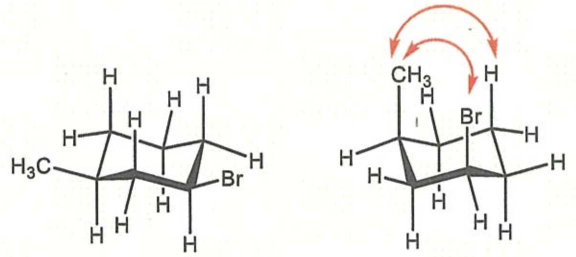
1) 5-エチル-3-メチル-4-プロピルオクタン　5-ethyl-3-methyl-4-propyloctane（２章）

2) (3*R*)-4,5-ジメチル-3-ヘキサノール、(3*R*)-4,5-dimethyl-3-hexanol　(5-3, 8-10)

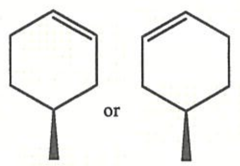
3) 1-エテニル-3-エチル-5-エチニルベンゼン、1-ethenyl-3-ethyl-5-ethynylbenzene (15-1)

問２．配点 1) 5 点、2) 5 点、3) 5 点

1) ２つの置換基が共にエクアトリアル位であり、1,3-ジアキシアル相互作用（赤矢印）がより小さいため、左側の配座がより安定。(4-4)

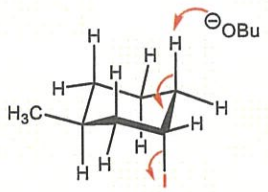


2)



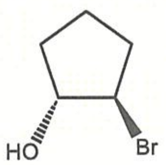
(7-7)

3) E2 機構



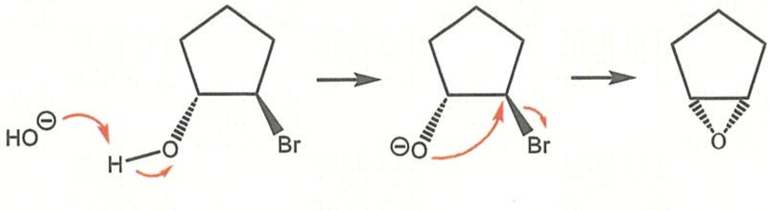
問３．　配点 1) 4 点、2) 7 点 3) 5 点、4) 7 点 (9-6, 練習問題 9-14(第６版))

1) (9-6)



2) (9-6)

SN2 反応



3) (9-6, 5-6)

1 位と 2 位に不斉炭原子を持つが、分子内に鏡面が存在するためメソ化合物であり、光学活性ではない.

4) (9-6)

(1*R*,2*R*) 異性体はヒドロキシ基とブロモ基が、SN2 反応における中間体アルコキシドの背面からの攻撃に適したトランス配置となっている. (1*R*, 2*S*) 異性体は，ヒドロキシ基とブロモ基がシス配置となっており、前面からの攻撃となり置換は難しい。(103 文字)

理工学　専攻（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

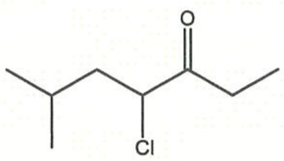
試験科目：第　外国語（　　）／専門科目（理工基礎　（化学基礎））

試験時間：（　１５０　）分

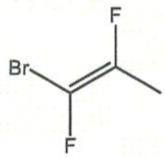
6　緑の()は教科書「ボルハルト・ショアー　現代有機化学」の対応する箇所です。

問１．配点 1) 4 点、2) 4 点、3) 4 点

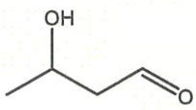
1)　(17-1)



2)　(11-1)

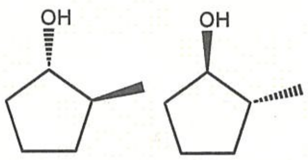


3)(17-1)



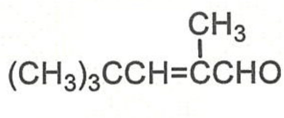
問２．配点 1) 6 点、2) 5 点

1)　(12-8)



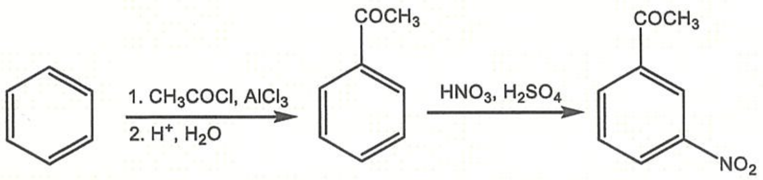
どちらか答えれば正解とする。

2) (18-6)



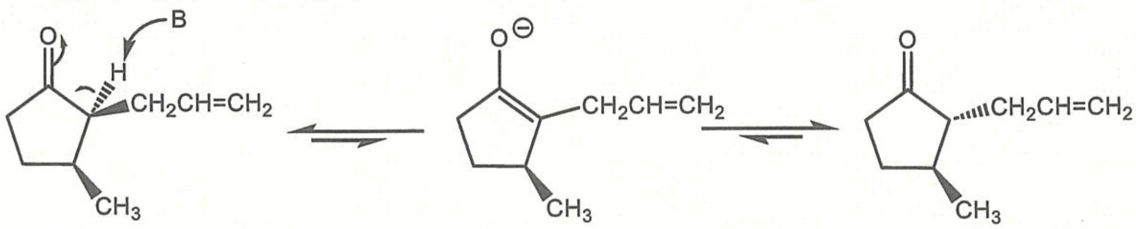
問３．　配点　12 点

(16-5)



問４．配点 1) 15 点(18-2)

アリル基が結合したカルボニルのα位水素が塩基により引き抜かれ、エノラートが生成し、α位炭素は立体中心ではなくなる。再プロトン化する際、メチル基に対してシス側から起こると、トランス異性体が生成する。この過程は可逆だが、立体的な理由からより安定なトランス異性体が得られる。



1 写像の単射性と全射性、像と逆像などのつながりの有機的な理解を試す問題である。

(1) (i)⇒(ii): f が単射とし, $f(A)=f(B)$ とする。$x \in A$ なら $f(x) \in f(A) = f(B)$ であるから $f(x') = f(x)$ となる $x' \in B$ が存在するが, f が単射だから $x = x' \in B$ である。つまり $A \subset B$ が成り立つ。A と B を入れ替えても同様の議論が成り立つので, $A = B$ が成り立つ。

(ii)⇒(i): 対偶を示す。f が単射でないなら, $x \neq x'$ かつ $f(x) = f(x')$ となる $x, x' \in X$ が存在する。このとき

$$f(\{x\}) = \{f(x)\} = \{f(x')\} = f(\{x'\})$$

が成り立つが, $\{x\} \neq \{x'\}$ だから (ii) が成り立たない。

(i)⇒(iii): f が単射であるとする。まず, $A \cap B \subset A$ かつ $A \cap B \subset B$ だから $f(A \cap B) \subset f(A)$ かつ $f(A \cap B) \subset f(B)$ すなわち $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ である。そこで $y \in f(A) \cap f(B)$ とすると, 像の定義から $f(x) = y$ となる $x \in A$ と $f(x') = y$ となる $x' \in B$ が存在するが, f が単射だから $x = x'$ であり, 従って $x \in A \cap B$ である。つまり $y = f(x) \in f(A \cap B)$ であるので $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ が成り立つ。

(iii)⇒(i): 対偶を示す。f が単射でないなら, $x \neq x'$ かつ $f(x) = f(x')$ となる $x, x' \in X$ が存在する。このとき $\{x\} \cap \{x'\} = \emptyset$ だから

$$f(\{x\} \cap \{x'\}) = f(\emptyset) = \emptyset$$

であるが,

$$f(\{x\}) = \{f(x)\} = \{f(x')\} = f(\{x'\})$$

だから

$$f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) = f(\{x\}) \neq \emptyset$$

であり, (iii) が成り立たない。

(2) (i)⇒(ii): f が全射と仮定する。つまり任意の $y \in Y$ に対し $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ が存在すると仮定する。$C \subset Y$ が $f^{-1}(C) = \emptyset$ を満たすなら, 任意の $c \in C$ に対し $f(x) = c$ となる $x \in X$ は存在しない。これは f が

全射であることに反するので, C の要素は存在しない, つまり $C=\emptyset$ である。

(ii)⇒(i): 対偶を示す。f が全射でないなら, ある $c\in Y$ が存在して, $f(x)=c$ となる $x\in X$ は存在しない。従って $f^{-1}(\{c\})=\emptyset$ であり, (ii) が否定される。

(i)⇒(iii): $C\subset Y$ を任意に取る。$y\in f\bigl(f^{-1}(C)\bigr)$ なら, $y=f(x)$ を満たす $x\in f^{-1}(C)$ が存在する。逆像の定義より $y=f(x)\in C$ である。つまり $f\bigl(f^{-1}(C)\bigr)\subset C$ である。(こちらは f が全射でなくても成り立つ。)
一方で $c\in C$ を任意に取ると, f が全射だから $f(x)=c$ となる $x\in X$ が存在し, 逆像の定義から $x\in f^{-1}(C)$ である。従って $c=f(x)\in f\bigl(f^{-1}(C)\bigr)$ となる。つまり $C\subset f\bigl(f^{-1}(C)\bigr)$ である。
以上より (iii) が示された。

(iii)⇒(i): 対偶を示す。f が全射でないなら, ある $c\in Y$ が存在して, $f(x)=c$ となる $x\in X$ は存在しない。すると $f^{-1}(\{c\})=\emptyset$ だから

$$f\bigl(f^{-1}(\{c\})\bigr)=f(\emptyset)=\emptyset\neq\{c\}$$

となり (iii) が否定された。

$\boxed{2}$ 線型写像の行列表示、固有値と固有ベクトルについての理解を問う基礎的な問題である。

(1) 2 次以下の多項式と 2 次以下の多項式の和、スカラー倍は 2 次以下の多項式である。

(2) P が 2 次以下ならその微分 P' は 1 次以下なことに注意すると, F の定義から $F(V) \subset V$ なので, $f(P) := F(P)$, $(P \in V)$ によって写像 $f: V \to V$ が定まる。線型性を確認する。

$P, Q \in V$, $c \in \mathbb{R}$ とする。

$$\begin{aligned} f(P+Q) &= F(P+Q) = 4(P+Q) - (x-3)(P'+Q') \\ &= (4P - (x-3)P') + (4Q - (x-3)Q') = F(P) + F(Q) = f(P) + f(Q), \end{aligned}$$

$$f(cP) = F(cP) = 4(cP) - (x-3)(cP)' = c(4P - (x-3)P') = cF(P) = cf(P)$$

(3)

$$\begin{aligned} f(1) &= 4\ , \\ f(x) &= 4x - (x-3) = 3 + 3x\ , \\ f(x^2) &= 4x^2 - (x-3)\cdot 2x = 6x + 2x^2 \end{aligned}$$

より

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(4)

- 固有値 $\lambda = 4$ に対する固有ベクトルは 1,
- 固有値 $\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは $x - 3$,
- 固有値 $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $x^2 - 6x + 9$

3 広義積分の基本事項とラグランジュの未定乗数法についての理解を問う問題である。

(1) $1 \leq x \leq t$ となる x, t に対して

$$\int_x^t \frac{\sin x}{x}dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_x^t - \int_x^t \frac{\cos x}{x^2}dx$$

なので

$$\left|\int_x^t \frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{t} + \int_x^t \frac{1}{x^2}dx \to 0 \quad (x \to \infty)$$

である. したがって, 広義積分に対するコーシーの収束定理より, 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

は収束する.

一方,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx = \int_0^\pi \frac{\sin t}{k\pi + t}dt > \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^\pi \sin t dt = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

である. これの $k = 0, 1, \ldots, n-1$ までの和を取れば

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx > \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \to \infty \quad (n \to \infty)$$

である. したがって

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$$

は発散する.

(2) ラグランジュの未定乗数法による.

$$x = \frac{9}{\sqrt{34}}, \quad y = \frac{8}{\sqrt{34}}, \quad z = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

で最大値 $\sqrt{34}$ を取り,

$$x = \frac{-9}{\sqrt{34}}, \quad y = \frac{-8}{\sqrt{34}}, \quad z = \frac{-3}{\sqrt{34}}$$

で最小値 $-\sqrt{34}$ を取る.

$\boxed{4}$ 群論の基本事項を問う問題である。

(1) 任意の $A \in N, P \in G$ に対し, $\det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) = \det(A) = 1$ なので, $PAP^{-1} \in N$. 従って, N は G の正規部分群である。
(或いは直接以下のことを考えてもよい。) $\det : G \longrightarrow \mathbb{Q}^\times$ は全射群準同型で, $\mathrm{Ker}\det = N$ なので, N は G の正規部分群である。準同型定理により, $G/N \simeq \mathbb{Q}^\times$ である。

(2) 例えば, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H,\ P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ とするとき,

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin H$$

なので, H は G の正規部分群でない。

(3) A が有限位数 n を持つとき, A の固有値 λ は 1 の n 乗根である。一方, λ は有理数係数の 2 次多項式の根でもある。このような n は, $n = 1, 2, 3, 4, 6$ のみである。位数 n を持つ A の例は, (例えば) 順に以下がある:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G,\ x \in I$ に対し、$c, d \in \mathbb{Q},\ x \in I$ より $cx + d \neq 0$ なので, $y := A \cdot x \in \mathbb{R}$ は常に定義される。このとき, $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ より $x = \dfrac{cy-a}{-dy+b}$ であるから, $y \in \mathbb{Q}$ とすると $x \in \mathbb{Q}$ となって矛盾する。従って, $y \in I$, 単位元 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ に対し, $E \cdot x = \dfrac{1x+0}{0x+1} = x$ である。また,

$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in G,\ x \in I$ に対し,

$$
\begin{aligned}
(A_1A_2) \cdot x &= \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix} \cdot x \\
&= \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)x + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)x + (c_1b_2 + d_1d_2)}\ , \\
A_1 \cdot (A_2 \cdot x) &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \frac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2} \\
&= \frac{a_1 \dfrac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2} + b_2}{c_1 \dfrac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2} + d_2} \\
&= \frac{a_1(a_2x + b_2) + b_2(c_2x + d_2)}{c_1(a_2x + b_2) + d_2(c_2x + d_2)} \\
&= \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)x + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)x + (c_1b_2 + d_1d_2)}
\end{aligned}
$$

なので, $(A_1A_2) \cdot x = A_1 \cdot (A_2 \cdot x)$ となる。以上により, $G \curvearrowright I$ である。

$\boxed{5}$ フーリエ級数の基本的な理解を問う問題である。**(1)** フーリエ係数は

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

であり，$f(x) = \cos\alpha x$ は偶関数なので，$b_n = 0\ (\forall n \geq 1)$ である。また，a_n $(n \geq 0)$ は

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\alpha x\,dx = \frac{2\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\alpha x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos\alpha x\cos nx\,dx = \frac{2\alpha\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \quad (n \geq 1)$$

となる。したがって,

$$\boxed{\cos\alpha x \sim \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha\sin\pi\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}\cos nx \quad (x \in [-\pi, \pi))}$$

(2) $\cos(-\pi)\alpha = \cos\pi\alpha$ だから，$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 全体で連続で区分的になめらかであり，そのフーリエ級数は $\mathbb{R}$ 上で $f(x)$ と一致する．(1) のフーリエ級数の等式に $x = \pi$ を代入して変形すれば,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2 - n^2} = \frac{1}{2\alpha^2}(\pi\alpha\cot\pi\alpha - 1)}$$

となる。

(3) パーセバルの等式 $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ を使って計算すれば,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha^2 - n^2)^2} = \frac{\pi}{4\alpha^3}\cot\pi\alpha + \left(\frac{\pi}{2\alpha\sin\pi\alpha}\right)^2 - \frac{1}{2\alpha^4}}$$

となる。

$\boxed{6}$ $N_\delta(x)$ で x の δ 近傍を表すとする.

(1) (i) $\forall x \in X, \exists \delta > 0, N_\delta(x) \subset U$.

(ii) 任意に $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ をとる. このとき, ある $\lambda \in \Lambda$ が存在し, $x \in U_\lambda$ となる. U_λ は X の開集合より, ある $\delta > 0$ が存在し, $N_\delta(x) \subset U_\lambda$ である. 従って, $N_\delta(x) \subset U_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ より, 「任意の $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在し, $N_\delta(x) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$」が言え, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ が X の開集合であることが分かる.

(iii) 例えば, 次のような $(\star)$ の反例を挙げることが出来る. (X,d) を 2 次元ユークリッド空間とし, $U_n = \{(x,y) \in X \mid x^2+y^2 < n^2\}$ $(n \in \mathbb{N})$ とする. このとき, U_n は X の開集合であるが, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_\lambda = \{(0,0)\}$ であり, $\{(0,0)\}$ は X の開集合ではない.

(2) (i) d_1 は距離関数である. 距離関数の公理

(D1) 任意の $f,g \in \Omega$ に対して, $d_1(f,g) \geq 0$ で等号成立は $f=g$ のときに限られる.

(D2) 任意の $f,g \in \Omega$ に対して, $d_1(f,g) = d_1(g,f)$ である.

(D3) 任意の $f,g,h \in \Omega$ に対して, $d_1(f,h) \leq d_1(f,g) + d_1(g,h)$ である.

を満たすことを示せばよい.

(D1) 任意の $f,g \in \Omega$ に対し, $|f(x)-g(x)|$ は任意の $x \in [0,1]$ で非負値であることより, $d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx \geq 0$ である. 特に, $d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx = 0 \iff |f(x)-g(x)| = 0\ (\forall x \in [0,1]) \iff f(x) = g(x)\ (\forall x \in [0,1]) \iff f = g$. (D2) 任意の $f,g \in \Omega$ について, $|f(x)-g(x)| = |g(x)-f(x)|\ (\forall x \in [0,1])$ が成り立つので, $d_1(f,g) = d_1(g,f)$ である. (D3) 任意の $f,g,h \in [0,1]$ に対し, $|f(x)-h(x)| = |(f(x)-g(x)) + (g(x)-h(x))| \leq |f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)|\ (\forall x \in [0,1])$ が成り立つので, $d_1(f,h) = \int_0^1 |f(x)-h(x)|dx \leq \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx + \int_0^1 |g(x)-f(x)|dx = d_1(f,g) + d_1(g,h)$.

(ii) d_2 は距離関数でない. なぜならば, 公理 (D1) の「$d_1(f,g) = 0 \iff f = g$」を満たしていない. 例えば, $f(x) = 1$, $g(x) = -1$ で f と g を定めると, $d_2(f,g) = 0$ であるが, $f \neq g$ である.

理工学　専攻（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目： 専門科目 （ 理工基礎 （物理学基礎） ）

試験時間：（ １５０ ）分

$\boxed{1}$

1. (1) $60°$

   (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $-1, 1, 3$

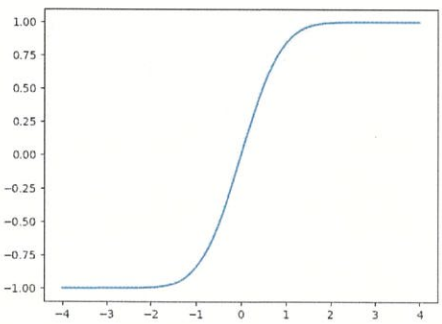
$\boxed{2}$

1. $\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$

2. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha^3}}, \quad \dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha^5}}$

3. 求めたい積分は上の水平方向の矢印に沿ったものである。問題の図のように一周した経路を考えると留数解析より積分の値は0。また垂直の積分路は被積分関数が0である。よって求めたい積分と下の水平方向の矢印の積分は打ち消しあう。

4.



$\boxed{3}$

1. (1)

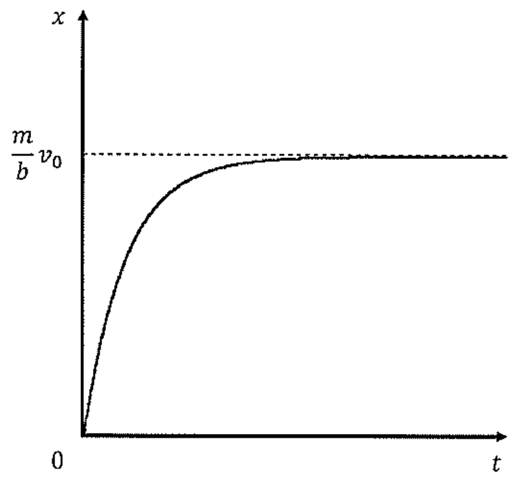
$$m\frac{dv}{dt} = -bv$$

(2)

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)$$

(3)

$$x = \frac{mv_0}{b}\left[1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right]$$



2. (1)

$$\frac{d}{dt}(\rho s v) = \rho s g$$

(2)

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}sg}$$

(3)

$$\frac{1}{6}\rho s^2 g$$

$\boxed{4}$

1. (1) (i) $r > b : \dfrac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}(b^3 - a^3)$

   (ii) $a < r < b : \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\left(r - \dfrac{a^3}{r^2}\right)$

   (iii) $r < a : 0$

   (2) (i) $r > b : \dfrac{\rho}{3\epsilon_0 r}(b^3 - a^3)$

   (ii) $a < r < b : \dfrac{\rho}{6\epsilon_0}\left(3b^2 - r^2 - \dfrac{2a^3}{r}\right)$

   (iii) $r < a : \dfrac{\rho}{2\epsilon_0}(b^2 - a^2)$

   (3) （解答例）面電荷密度 $\sigma = q/(4\pi a^2)$ の一様な面電荷が導体球殻の内面上（$r = a$）に分布する。

   (4) 0

2. (1) $\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$：ある点における磁束密度の発散は常に0であり，磁気単極子が存在しないことを意味する。
   $\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$：ある点における磁場の回転は，その点を流れる電流密度に比例することを示しており，電流が流れることにより磁場（の回転）が生じることを示している。

   (2) (i) $0 \leq r \leq a : B(r) = \dfrac{\mu_0 i_0}{2\beta r}\left[1 - \exp\left(-\beta r^2\right)\right]$

   (ii) $r > a : B(r) = \dfrac{\mu_0 i_0}{2\beta r}\left[1 - \exp\left(-\beta a^2\right)\right]$

   (3) 力の向き：$\hat{r} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ 方向

   力の大きさ：$\dfrac{\mu_0 i_0 q v_0}{2\beta r_0}\left[1 - \exp\left(-\beta a^2\right)\right]$

5

1.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi(x,y)=E\Psi(x,y)$$

2.

$$E=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}\right)$$

$$\Psi(x,y)=\phi_x(x)\phi_y(y)=\frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)$$

$$(n_x=1,2,3,..,n_y=1,2,3,..)$$

3. (a) $a=b$ のとき、$C=\dfrac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ と定義するとエネルギー E は、

	n_x	n_y	E
1番目	1	1	2C (縮退無し)
2番目	1	2	5C
	2	1	(2状態が縮退)
3番目	2	2	8C (縮退無し)
4番目	1	3	10C
	3	1	(2状態が縮退)

(b)

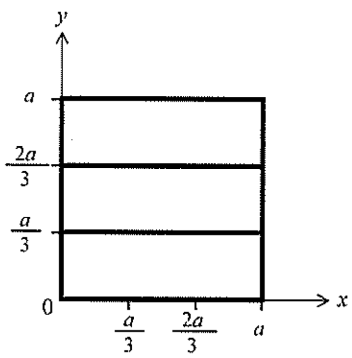


図 1: $n_x=1, n_y=3$

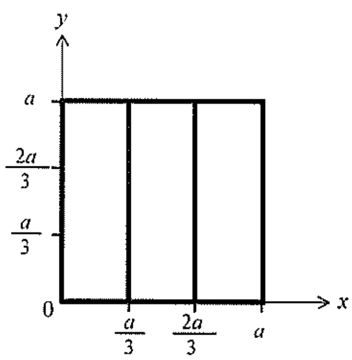


図 2: $n_x=3, n_y=1$

$\boxed{6}$

1. $N+1$ 個

2. 2^N 個

3. 1

4. N

5. $n=0$ と N, $S_{\min}=0$

6. 偶数：$S_{\max}=k_{\mathrm{B}}\ln\dfrac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)!\left(\frac{N}{2}\right)!}$, 奇数：$S_{\max}=k_{\mathrm{B}}\ln\dfrac{N!}{\left(\frac{N+1}{2}\right)!\left(\frac{N-1}{2}\right)!}$

7. $N\dfrac{P_{B\to A}}{P_{A\to B}+P_{B\to A}}$

8. $N\dfrac{1}{1+\exp\left(-\frac{E_B-E_A}{k_{\mathrm{B}}T}\right)}$

理工学　専攻（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：専門科目　（　理工基礎　（生物科学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

1

（1）ヒストンは真核生物のクロマチンの主要タンパク質である。分子量は比較的小さく強い塩基性を持つ。ヒストン H2A、H2B、H3、H4 の 4 種類はコアヒストンと呼ばれ、八量体を形成して DNA を巻き付けてヌクレオソームを構築する。ヒストン H1 はリンカーヒストンと呼ばれ、ヌクレオソーム間の DNA に結合する。アセチル化やメチル化などの修飾を受けると遺伝子にエピジェネティックな変化をきたす。

（2）細胞内 Ca^{2+}濃度の上昇に応答して構造変化を起こし、様々な標的タンパク質の活性を調節する小型の Ca^{2+}結合タンパク質である。

（3）細胞膜やゴルジ体から出芽し、エンドサイトーシスや細胞内小胞輸送に重要な役割を果たす小胞の被覆を作るタンパク質である。

（4）チャネルが開く確率が周囲の膜電位の変化によって調節されているチャネルである。例として、神経細胞には電位依存ナトリウムチャネルと電位依存カリウムチャネルが存在し、これらが膜電位の上昇によって開き、それぞれナトリウムイオンとカリウムイオンを選択的に通すことで活動電位が起こる。

（5）分化しておらず、自己再生（無限に分裂）できる細胞。組織内に少数存在し、分裂して細胞数を増やすことで専門機能を持つ細胞を生み出す役割を持つ。

2

（1）A 鎖。UGAUUGUAC
ラギング鎖はヘリカーゼの進行と反対方向に合成される。つまり、右が 5'、左が 3'である。その鋳型となる鎖は右が 3'、左が 5'でなければならないので、答えは A 鎖である。配列としては B 鎖に似ているが、T は U に置き換えられている。それを逆向きに並べたものが回答である。

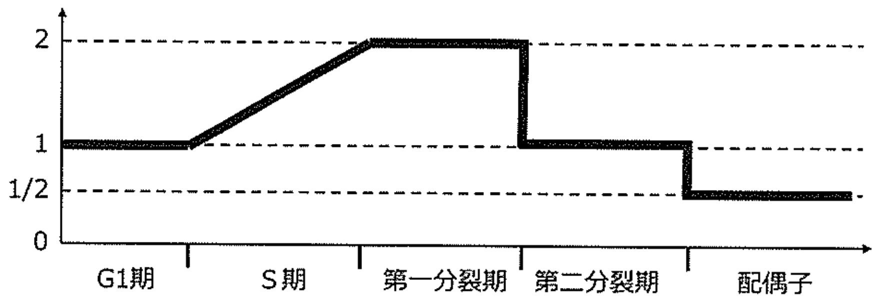
（2）B 鎖。GUACAAUCA

（3）TGATTGTAC

3

（1）動原体は細胞分裂前期に凝集した染色体のセントロメア上に形成され、紡錘体微小管を付着させる働きを持つ。動原体は微小管プラス端の重合脱重合が可能な状態でこれを付着させるので、微小管は染色体を引っ張る力を発生させることができる。また、動原体は微小管による張力を検知する機能を持っており、張力が弱い時は微小管付着の力を弱める。その仕組みにより、姉妹染色体は二方向性に微小管に付着する。

（2）



（3）交差はそれ以前にはなかった対立遺伝子の組み合わせを持った染色体をつくり出すので、配偶子の遺伝的多様性を劇的に増大させる。また、交差で出来るキアズマは、減数分裂の第一分裂期に対合した相同染色体同士を結合したままの状態に保つ働きも持つ。

4

（1）mRNA を cDNA に変換し、蛍光標識した後、それをスライドグラス（DNA チップ）上に固定された多数の既知配列の DNA プローブとハイブリダイゼーションさせる。その後、自動蛍光顕微鏡により cDNA が結合している DNA チップ上のプローブを特定し、それぞれのプローブで検出される cDNA の蛍光強度から各 mRNA の発現を解析する。

（2）DNA マイクロアレイ法では解析する mRNA の塩基配列をあらかじめ知り、DNA チップ上で網羅する必要がある。一方、RNA-Seq 法は次世代シーケンサーを用いて、全ての cDNA の塩基配列やコピー数を解析できるので、ゲノム情報がわかっていない生物にも適用することが可能である。また、発現が弱い mRNA や選択的スプライシングを受けた mRNA も検出できる。

（3）in situ hybridization 法が用いられる。蛍光色素または放射性同位体で標識した一本鎖の DNA または RNA プローブを組織や器官に反応させて、特定の塩基配列を持つ mRNA が作られる部位を可視化する。

5

（1）この分子ファミリーは G タンパク質共役型受容体(GPCR)である。
例として、アセチルコリンのムスカリン性受容体がある。心臓のペースメーカー細胞では、アセチルコリンが GPCR に結合すると三量体 G タンパク質が活性化する。G タンパク質の $\beta\gamma$ サブユニットが細胞膜のカリウムチャネルを開かせることで細胞膜の電気的興奮性が抑制される。その結果、心拍数の減少が起こる。
別の例として、アドレナリン受容体がある。アドレナリンが筋細胞のアドレナリン受容体に結合すると、三量体 G タンパク質が活性化する。G タンパク質の α サブユニット(Gs)の活性化によりアデニル酸シクラーゼが活性化し、サイクリック AMP を合成させる。サイクリック AMP により活性化した PKA はホスホリラーゼを活性化し、この酵素がグリコゲンを分解してグルコースを産生させる。

（2）

・分子 X が結合する分子を免疫沈降法やカラムクロマトグラフィーで分離精製する。精製したタンパク質をマススペクトルなどの方法で同定する。

・シグナル伝達経路を予測し、そこに含まれる分子について、特異的に阻害する阻害剤を用いる、またはその分子の機能欠損型の変異体を作製し細胞に導入することで、分子 X による細胞応答が抑制されるかを確認する。もしくは、シグナル分子について恒常的に活性を持つ変異体を作製し細胞に導入することで、分子 X と同じ反応が細胞に起こるかを確認する。

6

（1）カスパーゼ 3 は、その欠損により神経細胞数が減少しなかったと考えられるので、アポトーシスを誘導／促進させる分子であり、その作用がなくなったことで細胞数の減少が起こらなかったと考えられる。β カテニンは、その過剰発現によって細胞数が多くなったということなので、アポトーシスの抑制をする分子で、その効果が高くて生存する細胞が多かった可能性がある。もしくは細胞増殖を促進する分子であり、アポトーシスで死んだ細胞数よりも新たに作られた細胞数が多かったため、最終的に多くの細胞が残ったと推測される。

（2）壊死した細胞は膨張、破裂して内容物を放出し、炎症反応を起こすため周囲に害を与える可能性がある。一方、アポトーシスした細胞は、細胞の内容物が周囲に漏れ出す前に、細胞表面の変化を感知したマクロファージ（食細胞）により、速やかに取り込まれるため、組織の炎症性の反応は起こしにくい。

7

（1）普通の酵素の反応速度が毎秒 1000 分子程度であるのに対し、RuBisCO は毎秒 3 分子程度と非常に遅いため、糖を効率よく生産するには大量の酵素が必要となる。また、この酵素は CO_2 のみならず O_2 とも反応し、その反応部位が拮抗することも大量に必要な原因と考えられる。

（2）グリセルアルデヒド 3-リン酸は葉緑体のストロマで作られる。葉緑体ストロマにとどまったグリセルアルデヒド 3-リン酸はグルコース重合体であるデンプンに変換され貯蔵される。また、植物では主に、細胞質に運び出されたグリセルアルデヒド 3-リン酸から変換されてできたスクロースの形で葉から維管束（篩管）を通して輸送される。また、グリセルアルデヒド 3-リン酸の一部は脂肪酸に変換され、脂肪滴として集積し、これもエネルギー源として使われる。

（3）細胞外の他の高分子は細胞内で合成されてからエキソサイトーシスにより細胞外へ分泌される。一方、セルロースは細胞膜に存在する合成酵素複合体の働きにより細胞の外表面で作られる。酵素複合体が糖単量体を細胞膜の外へ運び、膜に付着した重合体を作る。

理工学　専攻（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：専門科目　（　理工基礎　（情報学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

1

(1) (a) x, y, z は演算，記憶，制御．順不同．コンピュータでは，入力装置からデータなどを入力し，演算装置で処理する。処理結果は出力装置から出力される。記憶装置にはプログラムとデータが記憶され，制御回路はコンピュータ全体の装置を制御する。

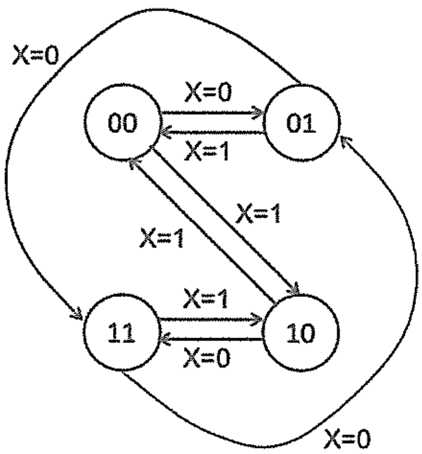
(b) 割り込みとは，CPU が実行中のプログラムを中断して何らかの処理を行ったのちに，もとのプログラムの実行を再開することである。例として，入出力装置からの入出力処理要求などが挙げられる。

(c) 23T

(2) (a)

$$S_1' = S_1 S_0 X + \overline{S_1}\,\overline{S_0} X + S_1 \overline{S_0}\,\overline{X} + \overline{S_1} S_0 \overline{X}$$
$$S_0' = S_1 S_0 \overline{X} + \overline{S_1} S_0 \overline{X} + S_1 \overline{S_0}\,\overline{X} + \overline{S_1}\,\overline{S_0}\,\overline{X}$$

(b)



状態遷移図B

理工学　専攻（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：専門科目　（　理工基礎　（情報学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

2

（１）

- プログラムの実行開始から，終了まで値を保持し続ける変数。
- 関数内で宣言した場合，再びその関数を呼び出したときに前回の値を保持するので，グルーバル変数を使わずに，関数の値を保持できる。

（２）

- (a) A B + C D + * E F - /
- (b) A - B / C + D * E

（３）

- 演算子がオペランドの後ろに置かれる。
- 演算子は計算の順序通りに書かれる。
- コンパイラやインタプリタの構文解析で使われ，演算子の順序通り命令を生成したり，実行したりすることで元の数式が表す通りの計算が行える。

（４）

- 識別子：変数名，関数名などプログラム内で区別するために使うもの。
- 予約語：プログラミング言語で予め意味が決まっている語。識別子として使うことはできない。
- プログラム内の識別子と予約語
  - ➢ 識別子：次の４つ
    - ✧ 変数名：score
    - ✧ 関数名：main, scanf, printf
  - ➢ 予約語：次の３つ
    - ✧ int, if, else

理工学専攻（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

試験科目：専門科目　（　理工基礎　（情報学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

3

数理的な知識の実問題への応用力とそれをプログラミングに活用する能力を問う問題である。

(1)

1 e^x の導出

$f(x) = e^x$ とおくと、導関数は何回微分しても同じで $f^{(n)}(x) = e^x$

したがって

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

よって

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

2 e^{-x} の導出

上の式に $x \to -x$ を代入すると

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

(2)

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
double exp_series(double x, double eps){
    /* a0 = 1,   a_{n+1} = a_n * x / (n+1) */
    double sum  = ①1.0;    // 初期和
    double term = ②1.0;    // 第 0 項
    int n = 0;
    while (1) {
        n++;
        term = term * x / n;
        sum += term;
        if (fabs(term) < ③eps) {
            break;
        }
    }
    return ④sum;
}
double logistic(double x, double eps){
    double e = exp_series(⑤-x, eps);
    return 1.0 / (1.0 + e);
}
```

```
int main(void){
    double x = 0.0;
    double eps = 1e-10;
    double p;
    while (1) {
        p = logistic(⑥x, eps);
        if (p > 0.9) break;
        x += 0.1;
    }
    printf("最小の x ≈ %.2f¥n", x);
    return 0;
}
```

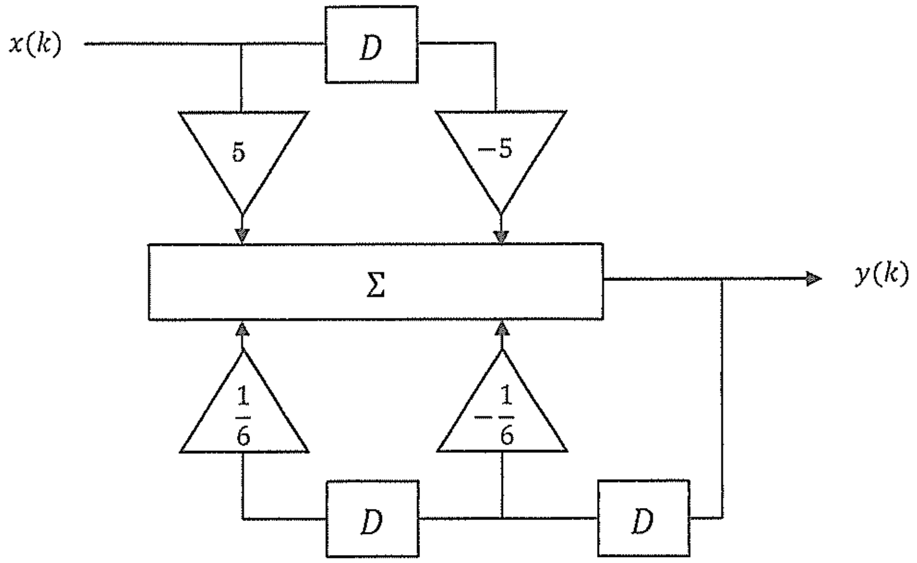
理工学　専攻（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：専門科目　（　理工基礎　（情報学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

4

(1) 与えられた差分方程式で表されるシステムは以下のようになる。



(2) $x(k)$，$y(k)$の変換をそれぞれ$X(z)$，$Y(z)$とし，与えられた差分方程式の両辺をz変換して$H(z) \coloneqq Y(z)/X(z)$を求めればよい。

$$H(z) = \frac{5z^2 - 5z}{z^2 + \frac{1}{6}z - \frac{1}{6}}$$

となる。

(3) $x(k) = \delta(k)$のとき$\mathrm{X}(z) = 1$であるから，$Y(z) = H(z)$となる。

(4) (3)の結果から

$$Y(z) = \frac{9z}{z + \frac{1}{2}} - \frac{4z}{z - \frac{1}{3}}$$

となる。この逆z変換を求めて

$$y(k) = 9\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 4\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

が求めるインパルス応答である。

(5) $Y(z)$の極の絶対値がいずれも 1 より小さいので，システムは安定である。

理工学　専攻（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：専門科目　（　理工基礎　（情報学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

5

(1)

$$f_1(n) = 2^{\sqrt{\log n}}, \quad f_2(n) = n + 10, \quad f_3(n) = n(\log n)^3, \quad f_4(n) = n^{4/3},$$
$$f_5(n) = n^2 \log_2 n, \quad f_6(n) = 10^n, \quad f_7(n) = 2^{(2^n)},$$

である．

(2) (a) 幅優先探索アルゴリズムは例えば以下の通りである．

QueueBFS(G, s)

1 $C = \{s\}$ とする．キュー Q を $\{s\}$ とする．

2 キュー Q が空集合でない限り，以下の **2.1** **2.2** を行う．

 2.1 キュー Q から要素を 1 つ取り出し，それを v とする．（取り出された v は Q からは消える．）

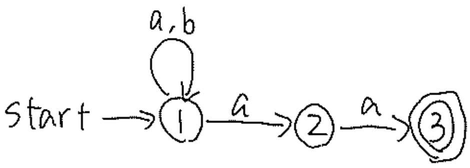
 2.2 v の後続頂点 $w \in \Gamma_G^+(v)$ それぞれに関して，もし $w \notin C$ ならば，C とキュー Q に w を加える．

3 C を出力して終了する．

(b) キューから出る順番には自由度があるが，例えば以下の通りである．

1, 2, 4, 3, 5, 7, 6

(3) 例えば，下図が言語 L を認識する非決定性有限オートマトンの状態遷移図である．



また，この決定性有限オートマトンを 5 つ組 $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ で表すと，

$$Q = \{1,\ 2,\ 3\}, \quad q_0 = 1, \quad F = \{3\}$$

であり，状態遷移関数 δ は以下の通りである．

$$\delta(1, \mathrm{a}) = \{1, 2\}, \quad \delta(1, \mathrm{b}) = \{1\}, \quad \delta(1, \varepsilon) = \emptyset$$
$$\delta(2, \mathrm{a}) = \{3\}, \quad \delta(2, \mathrm{b}) = \emptyset, \quad \delta(2, \varepsilon) = \emptyset$$
$$\delta(3, \mathrm{a}) = \emptyset, \quad \delta(3, \mathrm{b}) = \emptyset, \quad \delta(3, \varepsilon) = \emptyset.$$

理工学　専攻（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：専門科目　（　理工基礎　（情報学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

6

(1) 概念・論理・物理スキーマ
ANSI/X3/SPARC 式（外部・概念・内部）スキーマ

(2) 論理的データ独立性：実世界の変化による概念スキーマの変化からユーザのアプリケーションプログラムを不変に保つ。
物理的データ独立性：内部スキーマにおける変化は概念スキーマには影響を与えない。

(3) 共有ロック：他のトランザクションによるデータの書込を禁止するが読取は許可する SQL の SELECT 文によってデータの検索を行っている間は共有ロックがかけられ、他のトランザクションはそのデータを読むことはできるが更新することはできない。
占有ロック：読取と書込の両方を禁止し、そのトランザクションがデータを完全に占有する。SQL の INSERT 文、UPDATE 文及び DELETE 文を使用するときにかける。他のトランザクションは読取であってもデータにアクセスできない。

(4)
(a) LWA(Log Write Ahead)または WAL(Write Ahead Logging)
(b) データベースに障害が発生し二次記憶装置に書き込まれる前の更新データが失われることがあっても、ログの情報を用いてデータベースの内容を復元することができる。

理工学　専攻（ 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 ）

試験科目：専門科目　（　理工基礎　（情報学基礎）　）

試験時間：（　１５０　）分

7

(1) $2(1-y^2)x+(1+x^2)\left(\frac{1}{y}+y\right)y'=0$

$(1+x^2)\left(\dfrac{1}{y}+y\right)y'=2(y^2-1)x$

$y\neq\pm1$のとき、$\frac{1+y^2}{(y^2-1)y}y'=\frac{2x}{(1+x^2)}$から$\int\left(\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+1}-\frac{1}{y}\right)dy=\int\frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)}dx$

したがって$\ln\left|\frac{y^2-1}{y}\right|=\ln|1+x^2|+C$　ただし、Cは任意の定数

また、$y=\pm1$のとき与式を満たすので、これらも解

(2) $x^2yy'+yy'=1$

$(x^2+1)yy'=1$から$yy'=\frac{1}{x^2+1}$なので $\int y\,dy=\int\frac{1}{x^2+1}dx$

$x=\tan\theta$とおくと$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$ なので $\frac{1}{2}y^2=\int\frac{1}{\tan^2\theta+1}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int d\theta$

したがって、$y^2=2\theta+C=2\tan^{-1}x+C$　ただし、Cは任意の定数

(3) $\sin x\cos^2 y+y'\cos^2 x=0$

$y'\cos^2 x=-\sin x\cos^2 y$

$\cos^2 y\neq0$のとき$\frac{1}{\cos^2 y}y'=-\frac{\sin x}{\cos^2 x}$から$\int\frac{1}{\cos^2 y}dy=-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

$t=\cos x$とおくと$\frac{dt}{dx}=-\sin x$より$\tan y=\int\frac{1}{t^2}dt$

したがって、$\tan y=-t^{-1}+C=-\frac{1}{\cos x}+C$ ただし、Cは任意の定数

また、$\cos^2 y=0$つまり$y=\frac{\pi}{2}+n\pi$のとき与式を満たすのでこれらも解。nは任意の整数

(4) $(2x^2+3y^2)y-(x^2+2y^2)xy'=0$

$\left(1+2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right)y'=\left(2+3\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right)\dfrac{y}{x}$

$t=\frac{y}{x}$とおくと、$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}x+t$より$(1+2t^2)\left(\frac{dt}{dx}x+t\right)=(2+3t^2)t$

したがって、$(1+2t^2)\frac{dt}{dx}x=(1+t^2)t$

$t\neq0$のとき、$\frac{(1+2t^2)}{(1+t^2)t}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$から$\int\left(\frac{t}{1+t^2}+\frac{1}{t}\right)dt=\int\frac{1}{x}dx$

したがって、$\frac{1}{2}\int\left(\frac{(1+t^2)'}{1+t^2}\right)dt+\ln|t|=\int\frac{1}{x}dx$より$\frac{1}{2}\ln|1+t^2|+\ln|t|=\ln|x|+C$

$\ln\left|t\sqrt{1+t^2}\right|=\ln|x|+C$から$t\sqrt{1+t^2}=Ax$

ゆえに、$y\sqrt{x^2+y^2}=Ax^3$　ただし、Aは０以外の任意の定数

また、$t=0$のとき、つまり$y=0$のとき、与式を満たすのでこれも解