

理工学 専攻 (博士前期/修士)

試験科目：専門科目 (理工基礎 (機械工学基礎) )

1 ←

←

$$(1) A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \leftarrow$$

$$(2) \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4 \leftarrow$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \phi_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \phi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow$$

$$(3) P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \leftarrow$$

$$(4) \max f(x) = 4, \min f(x) = -3 \leftarrow$$

$$(5) B = \begin{bmatrix} -25 & -10 & 0 \\ -10 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow$$

理工学 専攻 (博士前期/修士)

試験科目: 専門科目 (理工基礎 (機械工学基礎))

2

(1)

$$\frac{y'}{y^3} - \frac{5}{y^2} = -5x \rightarrow \text{let } u = \frac{1}{y^2}$$

$$u' = -2y^{-3}y' \rightarrow \frac{-u'}{2} = y^{-3}y'$$

$$\frac{-u'}{2} - 5u = -5x$$

$$u' + 10u = 10x \rightarrow \text{積分因子法 } e^{\int 10dx} = e^{10x}$$

$$e^{10x}u' + e^{10x}10u = e^{10x}10x$$

$$(e^{10x}u)' = e^{10x}10x$$

$$(e^{10x}u) \frac{dy}{dx} = e^{10x}10x$$

$$\int (e^{10x}u)dy = \int (e^{10x}10x)dx$$

$$= \int fg' = fg - \int f'g$$

$$\rightarrow f = x \quad g = \frac{e^{10x}}{10}$$

$$\rightarrow f' = 1 \quad g' = e^{10x}$$

$$(e^{10x}u) = 10 \left[ x \frac{e^{10x}}{10} - \int \frac{e^{10x}}{10} dx \right]$$

$$u = x - \frac{1}{10} + Ce^{-10x}$$

$$\therefore u = \frac{1}{y^2} \rightarrow y(x) = \left( x - \frac{1}{10} + Ce^{-10x} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

(2)

曲面の面積の総和を求めよ

$$S = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2+y^2}} dx dy$$

円筒座標系に変換すると

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{\frac{1+r^2}{r^2}} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{1+r^2} dr$$

$\sqrt{1+r^2} + r = t$  において積分すると、面積  $S$  は以下のように求められる。

$$S = \pi \left\{ a\sqrt{1+a^2} + \log \left( a + \sqrt{1+a^2} \right) \right\}$$

※置換積分における式の置き換えについては、他の方法を用いてもよい。

(3)

$$\int C_1 = 1 + j$$

$$\int C_2 = 1 - j$$

(4)

$$F(j\omega) = \frac{8}{\omega^2 \tau} \sin^2 \frac{\omega \tau}{4}$$

理工学 専攻 (博士前期/修士)

試験科目: 専門科目 (理工基礎 (機械工学基礎) )

[3]

(1)

紐に作用する張力を  $T$ 、ブロック A とブロック B の間に作用する摩擦力を  $f$ 、ブロック B と回転台の間に作用する摩擦力を  $f'$  とすると、ブロック A、B に働く力の釣り合い式は

$$\text{ブロック A } T - f = m_A r \omega^2 \quad \dots(1)$$

$$\text{ブロック B } T + f + f' = m_B r \omega^2 \quad \dots(2)$$

式(2)から式(1)を引き、 $f = \mu m_A g$ 、 $f' = \mu(m_A + m_B)g$  を代入すると

$$2f + f' = (m_B - m_A)r\omega^2$$

$$2\mu m_A g + \mu(m_A + m_B)g = (m_B - m_A)r\omega^2 \quad \Leftarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu g (3m_A + m_B)}{r(m_B - m_A)}}$$

(2)

|

ロケットに作用する力  $F$  によって与えられる力積は、

$$\{(M - \Delta M)(V + \Delta V) + \Delta M(V - u)\} - MV = F \Delta t$$

となり、両辺を  $\Delta t$  で割り、 $\Delta t \rightarrow 0$  で極限をとれば  $\Delta M$  は  $M$  の減少分であるから、

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = -\frac{dM}{dt}, \Delta M \rightarrow 0, M \frac{dV}{dt} + \frac{dM}{dt} u = F, M = M_0 - tm_c$$

ロケットに作用する外力  $F = -Mg$ 、 $dM/dt = -m_c$  から、

$$\frac{dV}{dt} = -g + \frac{m_c u}{M_0 - tm_c}$$

両辺を積分し、 $t = 0$  のとき  $V = 0$  より、

$$V = \frac{dH}{dt} = -gt + u \log \frac{M_0}{M_0 - tm_c}$$

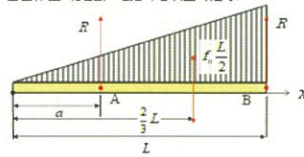
また、 $t$  秒後の高さ  $H$  は  $t$  で積分し、 $t = 0$  のときの  $H = 0$  より、

$$H = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{M_0 u}{m_c} \left\{ \left(1 - \frac{m_c}{M_0}t\right) \log \left(1 - \frac{m_c}{M_0}t\right) + \frac{m_c}{M_0}t \right\}$$

理工学 専攻 (博士前期/修士)  
 試験科目: 専門科目 (理工基礎 (機械工学基礎))

4 【材料力学】

(1) 自由体図 (FBD) を描くと次の通り。



鉛直方向の力 (上向き正) のつり合い

$$2R - f_0 \frac{L}{2} = 0$$

はりの左端まわりの力のモーメント (時計回り正) のつりあい

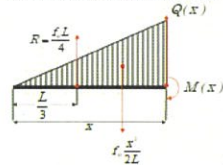
$$f_0 \frac{L}{2} \times \frac{2}{3} L - R \times a - R \times L = 0$$

二つの式を連立させて  $R_A, R_B$  を解くと

$$R = \frac{f_0 L}{4}, \quad a = \frac{L}{3}$$

(2) 区間  $[0, L/3]$

位置  $x$  で仮想的に切断して左側の部分について自由体図 (FBD) を描くと



鉛直方向の力 (上向き正) のつり合い

$$Q(x) - \frac{f_0 x^2}{2L} = 0$$

はりの左端まわりの力のモーメント (時計回り正) のつりあい

$$M(x) + \frac{f_0 x^3}{2L} \times \frac{2x}{3} - Q(x)x = 0$$

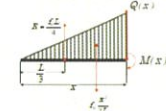
二つの式から  $Q, M$  を求めると

$$Q(x) = \frac{f_0 x^2}{2L}$$

$$M(x) = \frac{f_0 x^3}{6L}$$

区間  $[L/3, L]$

位置  $x$  で仮想的に切断して左側の部分について自由体図 (FBD) を描くと



鉛直方向の力 (上向き正) のつり合い

$$Q(x) + \frac{f_0 L}{4} - \frac{f_0 x^2}{2L} = 0$$

はりの左端まわりの力のモーメント (時計回り正) のつりあい

$$M(x) + \frac{f_0 x^3}{2L} \times \frac{2}{3} x - Q(x)x - \frac{f_0 L}{4} \times \frac{L}{3} = 0$$

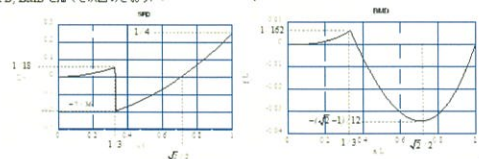
二つの式から  $Q, M$  を求めると

$$Q(x) = \frac{f_0 x^2}{2L} - \frac{f_0 L}{4} = \frac{f_0}{2L} \left( \frac{x^2}{L} - \frac{1}{2} \right)$$

$$M(x) = -\frac{f_0 x^3}{3L} - \frac{f_0 L}{12} - Q(x)x = -\frac{f_0 x^3}{3L} - \frac{f_0 L}{12} - \frac{f_0}{2L} \left( \frac{x^2}{L} - \frac{1}{2} \right) x$$

$$= f_0 L \left( \frac{1}{8} \left( \frac{x}{L} \right)^3 - \frac{1}{4} \left( \frac{x}{L} \right) + \frac{1}{12} \right)$$

(3) SFD, BMD を描くと次のとおり。



(4) 最大曲げモーメントの発生位置は  $x = L/2$  で、その大きさは  $\frac{\sqrt{3}-1}{12} f_0 L^2$  となる。

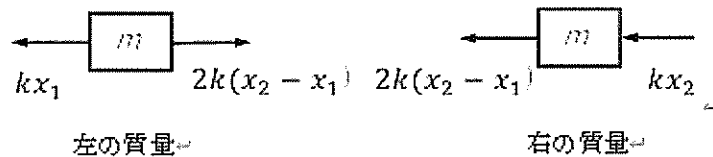
理工学 専攻 (博士前期/修士)

試験科目: 専門科目 (理工基礎 (機械工学基礎))

5 【機械力学】

(1) 。

フリーボディダイアグラムは以下のようになる。 。



運動方程式は以下のようになる。 。

$$-m\ddot{x}_1 - kx_1 + 2k(x_2 - x_1) = 0$$

$$-m\ddot{x}_2 - 2k(x_2 - x_1) - kx_2 = 0$$

(2) 。

固有値問題は以下の行列式で表すことができる。 。

$$\det \begin{bmatrix} 3k - m\omega^2 & -2k \\ -2k & 3k - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

よって固有振動数は以下の通りになる。 。

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{5k}{m}}$$

(3) 。

以下のラグランジュ方程式を用いて、運動方程式を求める。解は(1)と同様になる。 。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

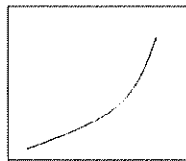
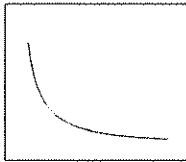
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

理工学 専攻 (博士前期/修士)

試験科目: 専門科目 (理工基礎 (機械工学基礎))

6 【熱工学】

(1)



(2)

ポリトロープ関係より

$$P_1 V_1^n = P_2 V_2^n$$

よって

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

理想気体の状態方程式を状態 1, 2 に適用すると

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1}$$

よって代入して

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

よって

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

(3)

境界仕事 (系が外界へする仕事) を

$$W_b = \int_{V_1}^{V_2} P dV$$

とする。ポリトロープ関係より

$$P = C V^{-n}$$

( $n \neq 1$ ) であるから

$$W_b = \int_{V_1}^{V_2} C V^{-n} dV = \left[ \frac{C}{1-n} V^{1-n} \right]_{V_1}^{V_2}$$

ここで  $C = P V^n$  を用いると

$$W_b = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1-n}$$

圧縮では  $W_b < 0$  であるため、圧縮に必要な投入仕事を正と定義すると

$$W = -W_b = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{n-1}$$

理想気体の状態方程式  $PV = RT$  を用いれば

$$W = \frac{n}{n-1} R(T_2 - T_1)$$

さらに (2) の結果を代入すると

$$W = \frac{n}{n-1} R T_1 \left\{ \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right\}$$

(4)

同じ圧力比  $\frac{P_2}{P_1}$  において、断熱圧縮 ( $n = \kappa$ ) と等温圧縮 ( $n = 1$ ) を比較する。

断熱圧縮では熱の出入りがなため、投入した仕事はすべて内部エネルギーの増加に変換され、温度が上昇する。その結果、同じ圧力比を達成するために大きな仕事が必要となる。一方、等温圧縮では圧縮途中で生じた内部エネルギーの増加分が外部へ熱として放出され、温度は一定に保たれる。したがって、等温圧縮に必要な仕事は、断熱圧縮に必要な仕事から圧縮途中で外部へ放出された熱量を差し引いたものに相当する。

このため、同一圧力比に対して

$$W_{iso} < W_{ad}$$

が成り立ち、等温圧縮が最小仕事となる。

理工学 専攻 (博士前期/修士)

試験科目: 専門科目 ( 理工基礎 (機械工学基礎) )

## 7 流体力学

まず(2)から始める。プローブ先端での圧力上昇 $p_s$ は、マンメータの読みから計算できる。

$$p_s = (\text{プローブ先端での圧力} - p_{air}) = \rho_m g h$$

次に(1)を解くことができる。まず、速度を導出するためにベルヌーイの式を変形する。ダクト内では高さの変化がないため、位置エネルギーの項は省略できる。

一般形:

$$p_{air} + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = const$$

変形後:

$$v = \sqrt{\frac{2p_s}{\rho}}$$

流れている空気の密度は与えられていないため、理想気体の状態方程式を用いて、与えられたデータから求める。

$$\rho = \frac{p_{air}}{RT}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\rho_m g h R T}{p_{air}}}$$

理工学 専攻 (博士前期/修士)

試験科目: 専門科目 ( 理工基礎 (機械工学基礎) )

## 8 【精密工学】

1. 正

正

正

正

正

正

正

正

正

正

正

正

2. 正

正

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4}$$

$Q = a q_1^{a_1} q_2^{a_2} \cdots q_n^{a_n}$  の場合,

$$\left(\frac{\sigma_Q}{Q}\right)^2 = a_1^2 \left(\frac{\sigma_1}{q_1}\right)^2 + a_2^2 \left(\frac{\sigma_2}{q_2}\right)^2 + \cdots + a_n^2 \left(\frac{\sigma_n}{q_n}\right)^2 \quad \text{なので}$$

$$\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right)^2 + 2^2 \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2$$

よって,  $\left(\frac{\sigma_V}{V}\right) = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right)^2 + 2^2 \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2}$

$$\frac{\Delta Q_{max}}{Q} = \left| a_1 \frac{\Delta q_1}{q_1} \right| + \left| a_2 \frac{\Delta q_2}{q_2} \right| + \cdots + \left| a_n \frac{\Delta q_n}{q_n} \right| \text{より,}$$

$$\frac{\Delta V_{max}}{V} = \left| \frac{\Delta \pi}{\pi} \right| + \left| 2 \frac{\Delta d}{d} \right| + \left| \frac{\Delta h}{h} \right| = 0.01 \text{ とすればよい.}$$

$\pi$  はいくらでも小さくできるため, 第2項と第3項を均等に誤差率を配当する.

$$\text{よって } \left| 2 \frac{\Delta d}{d} \right| = 0.005, \quad \left| \frac{\Delta h}{h} \right| = 0.005 \text{ となるため,}$$

$$|\Delta d| = 0.0025d, \quad |\Delta h| = 0.005h \text{ となる.}$$

理工学 専攻 (博士前期/修士)

試験科目: 専門科目 (理工基礎 (機械工学基礎))

⑨ 【制御工学】

(1) -

1)  $a, b$ が安定性へ与える影響

②より-

$$E(s) = R(s) - Y(s).$$

そして、プラント入力-

$$U_p(s) = G_1(s)E(s) + G_2(s)R(s).$$

よって-

$$Y(s) = G_2(s)\{G_1(s)R(s) - Y(s)\} + G_1(s)R(s).$$

整理すると-

$$Y(s)\{1 + G_2(s)G_1(s)\} = G_1(s)\{G_1(s) + G_2(s)\}R(s).$$

したがって、閉ループの特性方程式は次の式によって決まり-

$$1 + G_2(s)G_1(s) = 0.$$

$G_1(s)$  (すなわち  $a, b$ ) は分母 (安定性) に影響しません、

→  $a, b$ は零点特性 (積差) や過渡応答に影響するが、閉ループ安定性そのものには影響しない、

2)  $r(t) = \frac{t^2}{2}$ のとき、定常位置偏差を 0 にする  $b$ の条件

上で得た関係から-

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_2(s)\{G_1(s) + G_2(s)\}}{1 + G_2(s)G_1(s)}$$

よって-

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{Y}{R} = \frac{1 - G_2(s)G_1(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)}$$

ここで-

$$r(t) = \frac{t^2}{2}$$

なので-

$$R(s) = \frac{1}{s^3}$$

定常偏差  $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$ が 0 になるには、最終値定理より-

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0.$$

が必要、

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1 - G_2(s)G_1(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1 - G_2(s)G_1(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)} \frac{1}{s^3} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - G_2(s)G_1(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)} \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{K_2}{s(1+T_1s)} \frac{ax^2 + bx}{1+T_2s}}{1 + \frac{K_2}{s(1+T_1s)} \frac{K_1}{s}} \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_1T_2s^2 + (T_1 + T_2 - K_2a)s + 1 - K_2b}{s[s(1+T_1s)(1+T_2s) + K_1K_2(1+T_2s)]} \\ &= 0 \end{aligned}$$

とすには、次の条件を満たす必要がある:

$$1 - K_2b = 0, \quad b = \frac{1}{K_2}.$$

$$a = b(T_1 + T_2) = \frac{T_1 + T_2}{K_2}.$$

よって-

$$b = \frac{1}{K_2} \text{ かつ } a = b(T_1 + T_2) = \frac{T_1 + T_2}{K_2}.$$

(2) -

1) 状態遷移行列  $e^{At}$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}.$$

ここで、 $\mathcal{L}^{-1}$ はラプラス逆変換を意味する、

計算すると、

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-5t} & \frac{5}{2}e^{-3t} - \frac{5}{2}e^{-5t} \\ -\frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-5t} & -\frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{5}{2}e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

2) 伝達関数  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

よって-

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2-8s+15} = \frac{s+2}{(s+3)(s+5)}$$

3)  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $u(t) = 0$ のときの応答  $y(t)$

入力ゼロなので-

$$x(t) = e^{At}x(0), \quad y(t) = Cx(t) = Ce^{At}x(0).$$

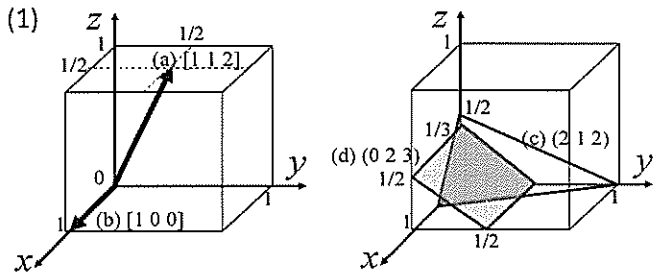
上の  $e^{At}$ を用いて計算すると-

$$y(t) = 4e^{-3t} - e^{-5t}.$$

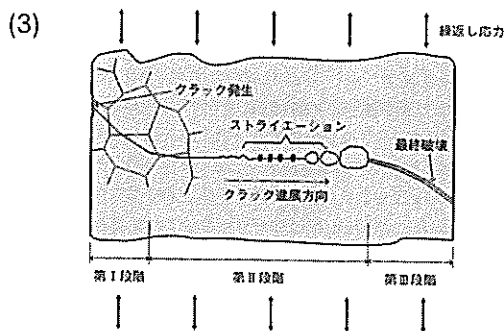
理工学 専攻 (博士前期/修士)

試験科目: 専門科目 ( 理工基礎 (機械工学基礎) )

10 材料科学



- (2)
- ・原子数: 2個
  - ・配位数: 8個



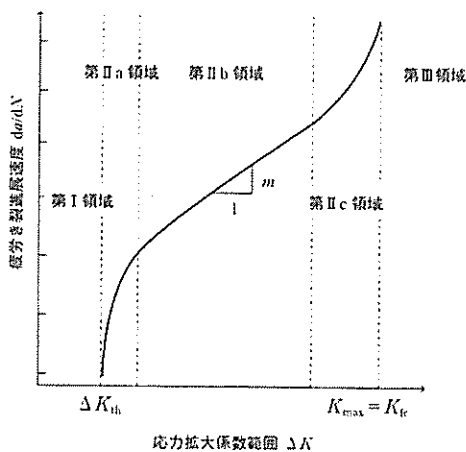
典型的な疲労き裂の発生と進展の過程を図に示す。通常、疲労き裂は材料表面において発生し、はじめは最大主応力の方向に対し傾いて ( $45^\circ$  せん断方向) 進展する(第I段階)。表面性状は入り込み突き出しのように凹凸を生じ凹部がき裂進展の起点となる。そして、ある程度き裂が進展した後に、き裂は最大主応力方向に対し垂直に進展する(第II段階)。破断面を観察すると、この領域では1サイクルごとにき裂が進んだ証拠となる縞模様 (ストライエーション) を観察することができる。その後、き裂が十分に長くなると、材料が負荷応力に耐えられなくなり、一気に破壊が進む(第III段階)。

理工学 専攻 (博士前期/修士)

試験科目：専門科目 ( 理工基礎 (機械工学基礎) )

10 材料科学

(4)



図のような一般的な疲労き裂進展速度と応力拡大係数範囲の関係 ( $da/dN-\Delta K$ 線図) が描け、3つの領域からなる。図の $\Delta K$ が小さい第IIa領域はき裂が不連続進展挙動を示す領域で、 $\Delta K$ の減少に伴い $da/dN$ は低下する。そして、 $da/dN$ が十分小さくクラックの進展が生じないと見なされる $\Delta K$ の下限値に達する。この $\Delta K$ を $\Delta K_{th}$ と書いて下限界応力拡大係数範囲(threshold stress intensity factor range)と呼び、この応力拡大係数範囲以下ではき裂は進展しないことを示す。一方、 $\Delta K$ が大きい第IIc領域は、き裂が連続進展挙動を示す領域で、 $\Delta K$ の増大に伴い $da/dN$ が増大し、 $K_{max}$ が限界値 $K_c$ に達すると、不安定破壊を生じ最終破壊に至る。この $K_c$ を $K_{fc}$ と書いて疲労破壊じん性値と呼ぶ。 $\Delta K$ が中程度の第IIb領域では、クラックは安定に進展し、パリス則 $da/dN=C(\Delta K)^m$ がよく成立する

理工学 専攻

( 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 )

試験科目：第 外国語 ( ) / 専門科目 ( 理工基礎 (電気・電子工学基礎) )

試験時間： ( 150 ) 分

1

- (1) (a)  $\frac{1}{1 - \exp(x)}$  (b)  $A \cos(\sqrt{2}x) + B \sin(\sqrt{2}x) - 2$
- (2) (a)  $\lambda = 3, 1$  (b)  $\mathbf{u}_{\lambda=1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_{\lambda=3}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_{\lambda=3}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (c)  $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & & 1 \end{pmatrix}, Q^T Q = I$  (d)  $Q^T A Q$ を計算して示す
- (3) (a) のこぎり状の周期  $2\pi$  の周期関数。2周期分。奇関数 (b)  $b_1 = 2, b_2 = -1$
- (c)  $\|g - g_2\|^2 = \|g\|^2 - \|g_2\|^2 = \frac{2\pi^3}{3} - 5\pi$

2

- (1) (a)  $\frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{1}{(x+5)^2} - \frac{1}{4(x-5)^2} \right\}$  (b) 0 (c)  $-\frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{1}{(x+5)^2} + \frac{1}{4(x-5)^2} \right\}$
- (d) 0 (e)  $\frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ -\frac{1}{(x+5)^2} + \frac{1}{4(x-5)^2} \right\}$
- (2) (15, 0)
- (3)  $\frac{q(x-15)^2}{160\pi\epsilon(x+5)(x-5)}$

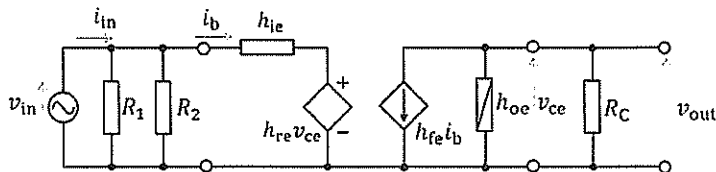
3

- (1)  $B_z(x) = 0$  (2)  $B_z(x) = \mu_0 n I$

4

- (1)  $R_2 \cong 50 \text{ k}\Omega, I_{CQ} \cong 1.2 \text{ mA}$

(2)



$$Z_i = \frac{h_{ie} R_1 R_2}{R_1 R_2 + h_{ie} (R_1 + R_2)}$$

$$A_v = \frac{-h_{oe}^{-1} R_C}{h_{ie} (h_{oe}^{-1} + R_C)} h_{fe}$$

5

- (1)  $i(0) = 0, i(t_1) = \frac{E}{R_1 + R_2}$
- (2)  $0 \leq t < t_1$  では  $i(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} \left( 1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} t} \right)$
- $t_1 \leq t$  では  $i(t) = \frac{E}{R_1} \left\{ 1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1}{L_1} (t - t_1)} \right\}$   $i_{SW}(t) = \frac{E}{R_1} \left\{ 1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1}{L_1} (t - t_1)} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_2}{L_2} (t - t_1)} \right\}$

(3) (2)で得られた関数に従い,  $0 \leq t < t_1$ では原点から正の指数特性で増加し電流値は $\frac{E}{R_1+R_2}$ に収束する。 $t_1 \leq t$ では $\frac{E}{R_1+R_2}$ から正の指数特性で増加し電流値は $\frac{E}{R_1}$ に収束する波形を描く。

6

(1) 供給される電力のうち, 実際に消費される (仕事をする) 電力の割合

(2)  $P_1 = 800 \text{ W}$       $Q_1 = \pm 600 \text{ var}$  (無効電力の符号は定義に依る)

(3)  $P_{12} = 980 \text{ W}$       $Q_{12} = \pm 360 \text{ var}$

(4) (a)  $6 \text{ A}$      (b)  $P_{123} = 1460 \text{ W}$ ,  $Q_{123} = 0 \text{ var}$

理工学 専攻 ( 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 )

試験科目: 第 外国語 ( ) / 専門科目 ( 理工基礎 (化学基礎) )

試験時間: ( 150 ) 分

1

初期状態	変化Iの後	変化IIの後
$T_0=300\text{K}$	$T_1=T_0$	$T_2$
$p_0$	$p_1=0.5p_0$	$p_2=p_0$
$V_0$	$V_1=2V_0$	$V_2$

問1

 $-dW=pdV$ であるから,  $T$ 一定のもとでは

$$\begin{aligned}
 -W_{\text{iso}} &= \int_{V_0}^{V_1} pdV = nRT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = nRT_0 \ln \frac{V_1}{V_0} = nRT_0 \ln \frac{2V_0}{V_0} = nRT_0 \ln 2 \\
 &= 1.00\text{mol} \times 8.314\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times 300\text{K} \times \ln 2 \\
 &= \underline{1.73 \times 10^3 \text{J}} \text{ (答)}
 \end{aligned}$$

問2

Poisson の式から

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \quad (\text{A1-2-1})$$

ここで,

$$V_1 = nRT_1/p_1, \quad V_2 = nRT_2/p_2 \quad (\text{A1-2-2})$$

であるから, 式(A1-2-2)を式(A1-2-1)に代入して  $V_1, V_2$  を消去すると

$$p_1 \left( \frac{nRT_1}{p_1} \right)^\gamma = p_2 \left( \frac{nRT_2}{p_2} \right)^\gamma$$

$$\therefore p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma} T_2^\gamma \quad (\text{A1-2-3})$$

式(A1-2-3)を変形して  $T_2$  について解くと

$$\begin{aligned}
 T_2 &= T_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\frac{C_{p,m}}{C_{v,m}}}{\frac{C_{p,m}}{C_{v,m}}}} = T_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\frac{C_{v,m}+R}{C_{v,m}}}{\frac{C_{v,m}+R}{C_{v,m}}}} = T_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{-R}{C_{v,m}+R}} = T_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{-\frac{2}{5}} = T_1 \left( \frac{0.5p_0}{p_0} \right)^{-\frac{2}{5}} = 0.5^{-\frac{2}{5}} T_0 \\
 \therefore T_2 &= 0.5^{-\frac{2}{5}} \times 300\text{K} = \underline{396\text{K}} \text{ (答)}
 \end{aligned}$$

(別解)

Poisson の式を用いて  $p_1 (=0.5p_0)$  と  $p_2$  との関係を求め、初期状態と変化IIとの間で Boyle- Charles の式をたてて  $T_2$  を求めてもよい。

問 3

$\Delta U_{ad} = q_{ad} + W_{ad}$  において  $q_{ad} = 0$  であるから

$$\begin{aligned} -W_{ad} &= -\Delta U_{ad} = -nC_{V,m}(T_2 - T_1) = -nC_{V,m}(T_2 - T_0) \\ &= -1.00 \text{ mol} \times (3/2) \times 8.314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times (396 \text{ K} - 300 \text{ K}) = \underline{\underline{-1.20 \times 10^3 \text{ J}}} \text{ (答)} \end{aligned}$$

(別解)

気体が外部にする仕事の微分式(1-1)から、途中 Poisson の式を用いて文字を置き換えて真っ当に解いてもかまわない (この解法の方が複雑である)。

問 4

$q_{total} = q_{iso} + q_{ad}$  において  $q_{ad} = 0$  であるから

$$q_{total} = q_{iso} = \Delta U_{iso} - W_{iso} \quad (\text{A-4-1})$$

ここで  $\Delta U_{iso} = 0$  であるから式(A-4-1)は

$$q_{total} = -W_{iso} = \underline{\underline{1.73 \times 10^3 \text{ J}}} \text{ (答)}$$

問 5

内部エネルギーとして気体 (ヘリウム) に蓄えられた。(答)

以 上

理工学 専攻（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

試験科目：第 外国語（ ） / 専門科目（理工基礎（化学基礎））

試験時間：（ 150 ）分

2

問1

 $\int_0^\pi \sin\theta d\theta = 2$  および  $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$  より

$$\begin{aligned}
 P_{1s}(r) &= r^2 |\Psi_{1s}|^2 \times 2 \times 2\pi \\
 &= r^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \right]^2 \times 4\pi \\
 &= \frac{4}{a_0^3} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)
 \end{aligned}$$

問2

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_{1s}(r)}{dr} &= \frac{d}{dr} \left[ \frac{4}{a_0^3} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) \right] \\
 &= \frac{8}{a_0^3} \left( 1 - \frac{r}{a_0} \right) r \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)
 \end{aligned}$$

となる。  $\frac{dP_{1s}(r)}{dr} = 0$  となる解は、  $r_{\max} = \begin{cases} a_0 \\ 0 \end{cases}$  の二つが解となる。

しかし、  $r_{\max} = 0$  は除外となるので、

$$\begin{aligned}
 P_{1s} &= \frac{4}{a_0^3} a_0^2 \exp\left(-\frac{2a_0}{a_0}\right) \\
 &= \frac{4}{a_0} \exp(-2) \\
 &= 0.541341 (1/a_0)
 \end{aligned}$$

問3

$$\begin{aligned}
 \langle r \rangle &= 4\pi \int_0^\infty r^3 \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \right]^2 dr \\
 &= 4 \int_0^\infty \frac{1}{a_0^3} r^3 \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) dr \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \int_0^\infty r^3 \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) dr \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \times \frac{3!}{\left(\frac{2}{a_0}\right)^{3+1}} = \frac{3}{2} = 1.5 (a_0)
 \end{aligned}$$

問4

平均半径が最大確率半径より大きいことから、電子軌道の波動関数には広がりがあることが示唆される。

理工学 専攻 ( 博士前期/修士 ) ・ 博士後期 ・ 前後期共通 )

試験科目 : 第 外国語 ( ) / 専門科目 ( 理工基礎 (化学基礎) )

試験時間 : ( 150 ) 分

3

以下に解答の一例を示す。解答のポイント等についてはこれらを参照すること。

問1 混合溶液中の成分濃度は以下の通りである。

$$c_{\text{CH}_3\text{COOH}} = (5.00 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3} \times 0.80 \text{ dm}^3) / (1.00 \text{ dm}^3) = 4.00 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3}$$

$$c_{\text{NaOH}} = (1.00 \times 10^{-1} \text{ mol dm}^{-3} \times 0.20 \text{ dm}^3) / (1.00 \text{ dm}^3) = 2.00 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3}$$

$$\text{化学平衡 : } K_a = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-][\text{H}^+]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]} = 1.74 \times 10^{-5} \text{ mol dm}^{-3} \quad (1)$$

$$K_w = [\text{H}^+][\text{OH}^-] = 1.00 \times 10^{-14} \text{ mol}^2 \text{ dm}^{-6} \quad (2)$$

$$\text{物質収支 : } c_{\text{CH}_3\text{COOH}} = [\text{CH}_3\text{COOH}] + [\text{CH}_3\text{COO}^-] = 4.00 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3} \quad (3)$$

$$c_{\text{NaOH}} = [\text{Na}^+] = 2.00 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3} \quad (4)$$

$$\text{溶液のイオンの中性 : } [\text{H}^+] + [\text{Na}^+] = [\text{CH}_3\text{COO}^-] + [\text{OH}^-] \quad (5)$$

酸性の水溶液の場合には $[\text{OH}^-]$ は他のイオンに比べて極小であり無視することができ、(5)式は以下のように近似することができる。

$$[\text{H}^+] + [\text{Na}^+] = [\text{CH}_3\text{COO}^-] \quad (5)'$$

(3), (4)式および(5)'式を(1)式に代入する。

$$\frac{([\text{H}^+] + [\text{Na}^+])[\text{H}^+]}{4.00 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3} - ([\text{H}^+] + [\text{Na}^+])} = 1.74 \times 10^{-5} \text{ mol dm}^{-3} \quad (1)'$$

$\text{CH}_3\text{COOH}$  の投入量および弱酸性であることを考慮すると $[\text{H}^+] \ll [\text{Na}^+]$ と考えることができるため、近似により

$$\frac{[\text{Na}^+][\text{H}^+]}{4.00 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3} - [\text{Na}^+]} = \frac{2.00 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3} \times [\text{H}^+]}{4.00 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3} - 2.00 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3}} = 1.74 \times 10^{-5} \text{ mol dm}^{-3} \quad (1)''$$

となる。従って水素イオン濃度 $[\text{H}^+]$ は、

$$\begin{aligned} [\text{H}^+] &= \frac{(1.74 \times 10^{-5} \text{ mol dm}^{-3}) \times (4.00 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3} - 2.00 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3})}{2.00 \times 10^{-2} \text{ mol dm}^{-3}} \\ &= 1.7 \times 10^{-4} \text{ mol dm}^{-3} \end{aligned}$$

問2

(1) 溶液混合後の金属イオン X と EDTA の濃度\*はいずれも  $c_X = c_{\text{EDTA}} = 1.00 \times 10^{-1} \text{ mol dm}^{-3}$  となる。 (\*錯イオン状態+遊離状態)

錯イオンの濃度を  $[\text{XL}]$ , 遊離状態の金属イオン X と EDTA の濃度をそれぞれ  $[\text{X}]$  と  $[\text{L}]$  とした場合, 錯イオンの安定度定数は以下のような関係で整理できる。

$$K_{\text{XL}} = \frac{[\text{X} \cdot \text{EDTA}]}{[\text{X}][\text{EDTA}]} = \frac{[\text{X} \cdot \text{EDTA}]}{[\text{X}]^2} = 5.0 \times 10^9 \text{ mol}^{-1} \text{ dm}^3$$

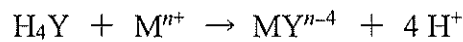
安定度定数の数値より, 投入された金属イオンはほとんどが錯イオンを形成した状態であることが判り, 溶液中の錯イオン濃度  $[\text{X} \cdot \text{L}] = c_X = 1.00 \times 10^{-1} \text{ mol dm}^{-3}$  と近似できる。

従って, 溶液中に存在する遊離した金属イオン X の濃度  $[\text{X}]$  は

$$[\text{X}] = \sqrt{\frac{[\text{X} \cdot \text{EDTA}]}{5.00 \times 10^{10} \text{ mol}^{-1} \text{ dm}^3}} = \sqrt{\frac{1.00 \times 10^{-1} \text{ mol dm}^{-3}}{5.00 \times 10^{10} \text{ mol}^{-1} \text{ dm}^3}}$$

$$= 1.4 \times 10^{-6} \text{ mol dm}^{-3}$$

(2) a) 滴定開始の直後, EDTA ( $\text{H}_4\text{Y}$ ) は水溶液中に遊離状態で存在する金属イオン  $\text{M}^{n+}$  と反応して錯イオンを形成する。



b) 当量点付近において, EDTA ( $\text{H}_4\text{Y}$ ) は金属指示薬 In と反応した金属イオン  $\text{M}^{n+}$  (キレート錯体  $\text{MIn}^{n+}$ ) と反応して錯イオンを形成し, 水溶液中に遊離状態の金属指示薬を放出させる。



問3

(1) ネルンスト式より

$$E_{\text{Zn}^{2+}, \text{Zn}} = -0.763 + \frac{0.059}{2} \log_{10} \frac{[\text{Zn}^{2+}]}{1}$$

$$E_{\text{Cu}^{2+}, \text{Cu}} = 0.337 + \frac{0.059}{2} \log_{10} \frac{[\text{Cu}^{2+}]}{1}$$

$$E_{\text{Cu}^{2+}, \text{Cu}} - E_{\text{Zn}^{2+}, \text{Zn}} = 0.337 - (-0.763) + \frac{0.059}{2} \log_{10} \frac{[\text{Cu}^{2+}]}{[\text{Zn}^{2+}]}$$

イオン濃度を代入すると

$$E_{\text{Cu}^{2+}, \text{Cu}} - E_{\text{Zn}^{2+}, \text{Zn}} = 0.337 + 0.763 + \frac{0.059}{2} \log_{10} \frac{1.00 \times 10^{-2}}{1.00 \times 10^{-1}}$$

$$= 1.100 + \frac{0.059}{2} \log_{10}(10^{-1}) = 1.0705$$

$$\rightarrow 1.07 \text{ V}$$

(2) (1)での起電力の計算式より

$$E_{\text{Cu}^{2+}, \text{Cu}} - E_{\text{Zn}^{2+}, \text{Zn}} = 0.337 + 0.763 + \frac{0.059}{2} \log_{10} \frac{[\text{Cu}^{2+}]}{[\text{Zn}^{2+}]}$$

$\log_{10} \frac{[\text{Cu}^{2+}]}{[\text{Zn}^{2+}]}$ の項目が増すようにイオン濃度を調整する, すなわち,  $[\text{Cu}^{2+}]$ を増大させる, または $[\text{Zn}^{2+}]$ を低減させることで, 起電力を上昇させることが可能と予想できる。

(加えて化学種の枯渇や活量係数の変動を考慮した説明を含む回答も適宜考慮する)

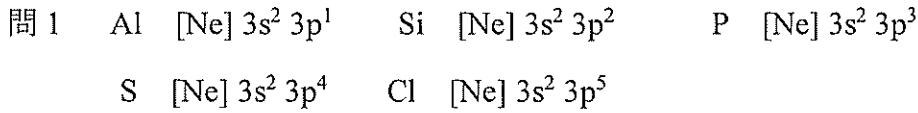
以上

理工学 専攻（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

試験科目：第 外国語（ ） / 専門科目（理工基礎（化学基礎））

試験時間：（ 150 ）分

4 以下に解答の一例を示す。解答のポイント等についてはこれらを参照すること。



第一イオン化エネルギーの増加する順 Al &lt; Si &lt; S &lt; P &lt; Cl

同一周期上の元素同士を比較した場合、原子番号の増大にともない原子核の有効核電荷が大きくなるためイオン化エネルギーは大まかには増加する。

そのうち、3つ3p軌道をそれぞれ1個ずつの電子が占有する電子配置（半占軌道）のPは安定な状態であり、一方でそれよりも1つ多い電子を持つSでは静電反発力によりその電子が取り除きやすくなるため、結果としてPとSiでイオン化エネルギーの順序が入れ替わる。

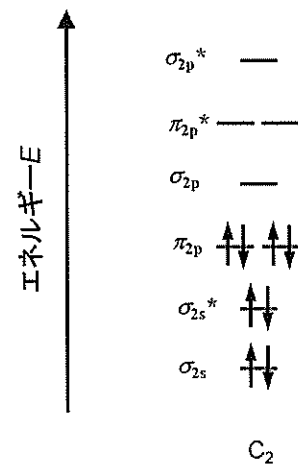
問2 (1) “PF<sub>5</sub>” 中心元素 (P) の混成軌道：sp<sup>3</sup>d, 幾何構造：三方両錐型 (5 電子対)

(2) 分子軌道 (MO) エネルギー準位図：右の図例を参照

[He] 2s<sup>2</sup> 2p<sup>2</sup>の電子配置をもつC原子同士が結合してC<sub>2</sub>分子を形成する場合、(σ<sub>2s</sub>)<sup>2</sup> (σ<sub>2s</sub><sup>\*</sup>)<sup>2</sup> (σ<sub>2p</sub>)<sup>4</sup>の形で電子が配置される。その際、結合性MOの電子数=2+4=6, 反結合性MOの電子数=2より、C<sub>2</sub>の結合次数は

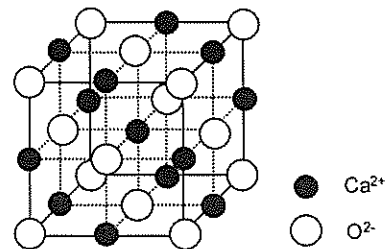
$$[(\text{結合性 MO の電子数}) - (\text{反結合性 MO の電子数})] / 2 = 2$$

であり、結合次数が正の値をとるために安定な分子として存在しうる。



問3 イオン配置図：右の図例を参照

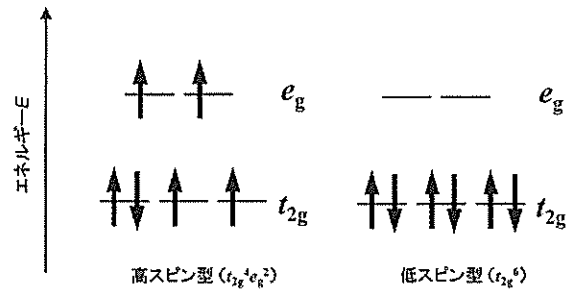
- a) 陽イオン 4 個, 陰イオン 4 個  
 b) 6 配位



問 4。

(1)  $t_{2g}^4 e_g^2$  (高スピン型, 不対電子数 4) および  $t_{2g}^6$  (低スピン型, 不対電子数 0) の二種類の電子配置の状態をとり得る。

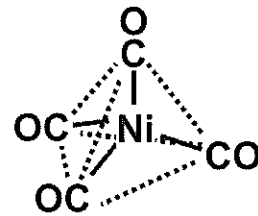
不対電子を含む高スピン型の電子配置を持つ錯体は磁場に対して引き寄せられる“常磁性”の性質をもち, 一方, 不対電子を含まない低スピン型の電子配置を持つ錯体は磁場から押し出される“反磁性”の性質を示す



(2) Ni(0)には 10 個の価電子が含まれる。一つの CO が 2 個の電子を供与することを想定した場合,  $[\text{Ni}(\text{CO})_x]$  が 18 電子則を満たして安定な金属カルボニル化合物を形成するためには金属原子の価電子と CO が供与する電子の総数が 18 となる必要があり (=18 電子則), これを満たすために 4 個の CO が結合することになる。

$$10 + (2 \times x) = 18 \rightarrow x = 4, [\text{Ni}(\text{CO})_4]$$

それぞれの CO が均等に隔離された状態となるためには, この化合物の立体構造は Ni を中心金属とした正四面体型構造となる必要がある。



理工学 専攻（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

試験科目：第 外国語（ ） / 専門科目（理工基礎（化学基礎））

試験時間：（ 150 ）分

5

問1

- 1) 5-(2-メチルプロピル)-4-メチルノナン
- 2) (R)-ペンタン-2-チオール
- 3) シクロペントキシヘプタン

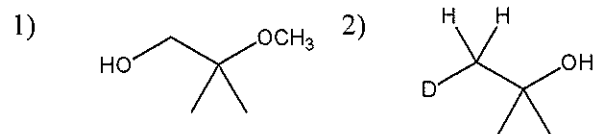
問2

- 1) ヨウ化物イオンとの  $S_N2$  反応により、(R)-2-ヨードオクタンから、立体が反転した(S)-2-ヨードオクタンが生成する。生成した(S)体もヨウ化物イオンと反応し、 $S_N2$  反応を何度も繰り返すため、光学活性が失われる。
- 2) メタノール溶液中では、塩化物イオンが水和され、求核性が減少するため、アプロティックな溶媒である N,N-ジメチルホルムアミド溶液中において、反応がより速い。

3)  $C > B > A$ 

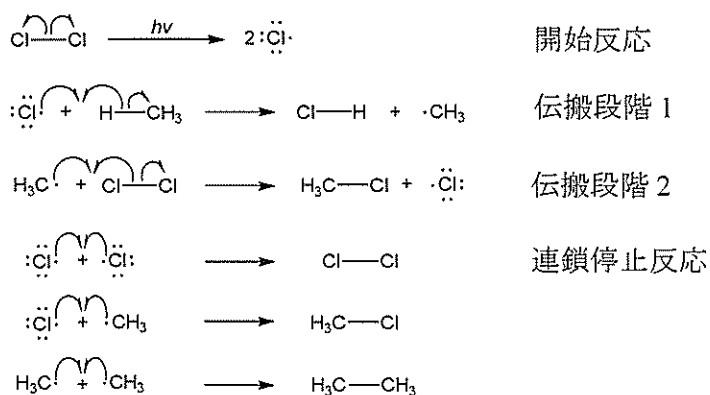
加溶媒分解反応は  $S_N1$  機構で進行し、律速段階は1段階目の脱離基 Br の解離である。この時、直接結合するアルキル置換基が多いほどカルボカチオン中間体が超共役により安定化され生成しやすい。つまり、反応速度が速い。

問3



問4

1) 次のラジカル連鎖機構によって進行する。



2) 伝搬段階2において塩素原子が生成し、伝搬段階1に利用され、サイクルとなるから。

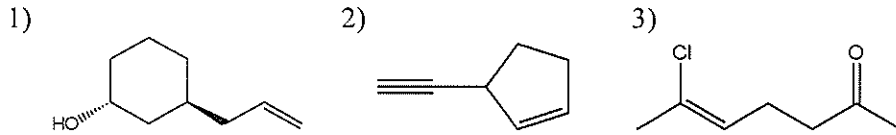
理工学 専攻 ( 博士前期/修士・博士後期・前後期共通 )

試験科目: 第 外国語 ( ) / 専門科目 ( 理工基礎 (化学基礎) )

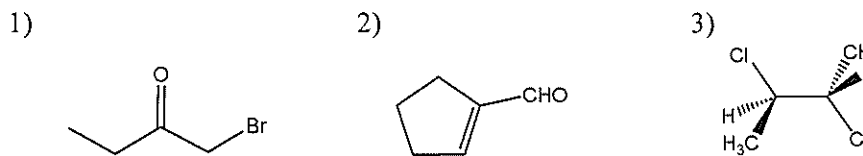
試験時間: ( 150 ) 分

6

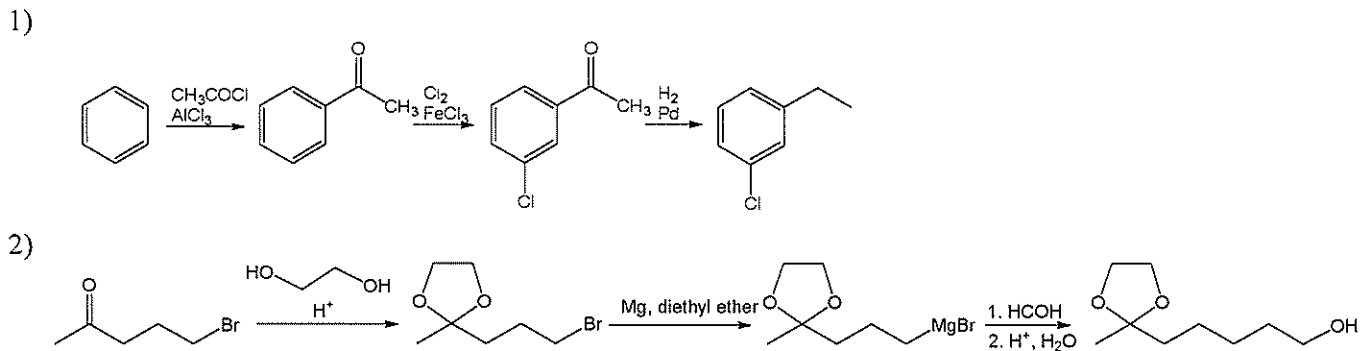
問1



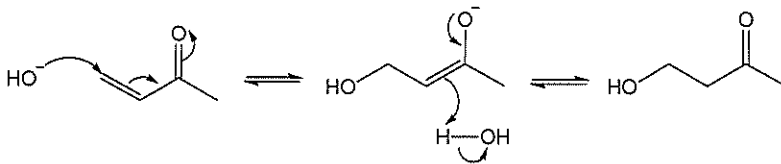
問2



問3

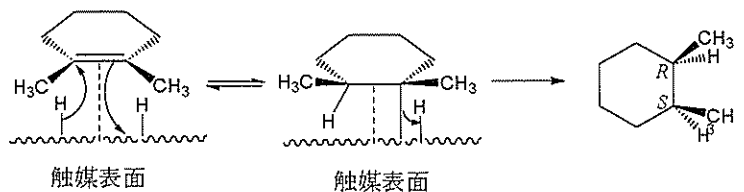


問4



問5

水素  $H_2$  は触媒により活性化され、水素—水素結合が切れて、パラジウム触媒表面に結合する。その触媒表面に吸着 (結合) したアルケンの炭素に、パラジウム触媒表面上の水素が移ることで水素化反応が進行するため、シン付加となる。不斉炭素を2つ (R と S) もつ化合物が生成するが、分子内の鏡面が存在するメソ化合物なので、キラルな化合物ではない。



## 2026年度9月入試(理工学専攻(博士前期):数学基礎)

### 解答例

**1** (1)  $0 < x$  とすると, アルキメデスの公理から  $\frac{1}{n} < x$  となる自然数  $n$  が存在する. すると  $x \notin (0, \frac{1}{n}]$  となるので.

(2) 区間  $(0, 3)$

(3) (i) 正しくない. 例えば,  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x, y) = x$  で定義するとこれは全射だが  $A = \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$  について  $f^{-1}(f(A)) = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$  は  $A$  に一致しない.

(ii) 正しい.  $f(f^{-1}(B)) \subset B$  は  $f$  が全射かどうかによらず正しい. 逆の包含を示すために  $b \in B$  を任意にとると, 全射性から  $b = f(x)$  となる  $x \in X$  が取れる.  $f(x) = b \in B$  なので  $x \in f^{-1}(B)$  となり  $b = f(x) \in f(f^{-1}(B))$  である.

**2** (1) (i)

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 + 1 & a & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - a)$$

より, 固有値は,  $a \neq -1$  のとき,  $-1$ (重解) および  $a$ .  $a = -1$  のとき,  $-1$ (3重解).

(ii)  $a$  の必要十分条件は,  $a \neq -1$ . このとき,  $\lambda = -1$  に対する固有ベク

トルは,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (ただし定数倍を除く)

$\lambda = a$  に対する固有ベクトルは,  $\begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

よって,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  とすると,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & a \end{pmatrix}$ .

(2) (i)  $0 \in V, 0 \in W$  より,  $0 = 0 + 0 \in V + W$ . また,  $x = x_1 + x_2$  ( $x_1 \in V, x_2 \in W$ ),  $y = y_1 + y_2$  ( $y_1 \in V, y_2 \in W$ ) とすると,  $x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in V + W$  ( $x_1 + y_1 \in V, x_2 + y_2 \in W$ ). さらに,  $k \in \mathbb{R}$ ,  $x = x_1 + x_2$  ( $x_1 \in V, x_2 \in W$ ) に対し,  $kx = kx_1 + kx_2 \in V + W$  ( $kx_1 \in V, kx_2 \in W$ ). 以上より,  $V + W$  は部分空間.

同様に, 任意の  $v \in V$  に対し,  $(0, v) = 0$  より,  $0 \in V^\perp$ .  $x, y \in V^\perp$  とすると, 任意の  $v \in V$  に対し,  $(x + y, v) = (x, v) + (y, v) = 0 + 0 = 0$ . よって  $x + y \in V^\perp$ .  $(kx, v) = k(x, v) = 0$  より,  $kx \in V^\perp$ . 以上より,  $V^\perp$  も部分空間.

(ii)  $x \in V \cap W$  とする.  $x \in W \subset V^\perp$  より, 任意の  $v$  に対し,  $(x, v) = 0$ . 特に,  $v = x \in V$  とすると,  $(x, x) = 0$  より,  $x = 0$  が成り立つ. したがって,  $V \cap W = \{0\}$ .

仮定より,  $W \subset V^\perp$  は成立. 任意に  $x \in V^\perp$  をとる.  $\mathbb{R}^n = V + W$  より,  $x = v + w$  ( $v \in V, w \in W$ ) と表される. 両辺に  $v$  との内積をとると,  $(x, v) = (v, v) + (w, v)$ . ここで,  $x \in V^\perp$  より,  $(x, v) = 0, w \in W \subset V^\perp$  より,  $(w, v) = 0$ . したがって,  $(v, v) = 0$ . すなわち,  $v = 0$ . よって,  $x = w \in W$  である. これより,  $V^\perp \subset W$  が成立. よって,  $V^\perp = W$ .

**3** (1) 積分領域  $D$  は

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt[3]{y} \leq x \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^3\}$$

と表せるから, 2重積分の順序を交換すれば

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{x^4 + 2} dx = \int_0^1 dx \int_0^{x^3} \sqrt{x^4 + 2} dy = \int_0^1 x^3 \sqrt{x^4 + 2} dx$$

となる. ここで  $t = x^4 + 2$  と変数変換すれば,  $x^3 dx = \frac{1}{4} dt$  だから,

$$\int_0^1 x^3 \sqrt{x^4 + 2} dx = \frac{1}{4} \int_2^3 \sqrt{t} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \left[ t^{\frac{3}{2}} \right]_2^3 = \frac{1}{6} (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

となる.

(2) はじめに, 任意の自然数  $n$  に対して,  $\alpha > 0$  のときは  $\lim_{x \rightarrow +0} |x^\alpha (\log x)^n| = 0$  であり,

$-1 < \alpha \leq 0$  のときは  $\alpha + 1 > \beta > 0$  となる  $\beta$  を取れば  $\lim_{x \rightarrow +0} |x^{\alpha - \beta + 1} (\log x)^n| = 0$  となるので, いずれの場合も, 広義積分  $I_n$  は収束する (発散しない) ことに注意しておく.

そこで,  $I_n$  に部分積分を適用すれば,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^\alpha (\log x)^n dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left( \left[ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} (\log x)^n \right]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot n (\log x)^{n-1} \frac{1}{x} dx \right) \\ &= -\frac{n}{\alpha+1} \int_0^1 x^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x} (\log x)^{n-1} dx = -\frac{n}{\alpha+1} \int_0^1 x^\alpha (\log x)^{n-1} dx = -\frac{n}{\alpha+1} I_{n-1} \end{aligned}$$

という漸化式が得られるから,

$$I_n = -\frac{n}{\alpha+1} I_{n-1} = \cdots = (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^n} I_0$$

となり,  $\alpha + 1 > 0$  に注意すれば,

$$I_0 = \int_0^1 x^\alpha dx = \left[ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$$

であるから、任意の自然数  $n$  に対して、

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{(\alpha + 1)^{n+1}}$$

が成り立つ。(厳密には数学的帰納法による.)

【別解】  $\alpha$  をパラメータ とする積分

$$F(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha dx \quad \left( = I_0 = \frac{1}{\alpha + 1} \right)$$

を考え、微分と積分の順序交換が可能であることをきちんと示せば (証明が必要),

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} F(\alpha) = \frac{d^n}{d\alpha^n} \int_0^1 x^\alpha dx = \int_0^1 \frac{d^n}{d\alpha^n} x^\alpha dx = \int_0^1 x^\alpha (\log x)^n dx = I_n$$

かつ

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} F(\alpha) = \frac{d^n}{d\alpha^n} \left( \frac{1}{\alpha + 1} \right) = (-1)^n \frac{n!}{(\alpha + 1)^{n+1}}$$

であることから、 $I_n = (-1)^n \frac{n!}{(\alpha + 1)^{n+1}}$  を求めることもできる.

- (3) (i)  $f$  が  $x = a$  で連続であること、すなわち  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  となることの定義を  $\varepsilon$ - $\delta$  論法に則って書くと、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

と表される.

- (ii)  $f$  が  $x = a$  で連続でないことは、(i) の否定として

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R}) \left( (|x - a| < \delta) \wedge (|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon) \right)$$

と表される.

- 4** (1)  $g \in G$  に対して

$$(\chi_1 \chi_2) \chi_3(g) = \chi_1(g) \chi_2(g) \chi_3(g) = \chi_1(\chi_2 \chi_3)(g)$$

より  $\widehat{G}$  の演算は結合的である。単位元は  $1(g) = 1 (g \in G)$  であり、 $\chi \in \widehat{G}$  の逆元は  $\chi^{-1}(g) = \chi(g)^{-1} (g \in G)$  である。

- (2)  $a$  を  $G$  の生成元とする。  $\chi_1 \in \widehat{G}$  を  $\chi_1(a^k) = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$  と定めれば、 $\widehat{G}$  は  $\chi_1$  で生成される位数  $n$  の巡回群である。

- (3)  $\chi = 1$  のとき  $\sum_{g \in G} 1(g) = \sum_{g \in G} 1 = n$  である。  $\chi \neq 1$  のとき

$$\begin{aligned} (1 - \chi(a)) \sum_{g \in G} \chi(g) &= \sum_{g \in G} \chi(g) - \chi(a) \sum_{g \in G} \chi(g) \\ &= \sum_{g \in G} \chi(g) - \sum_{g \in G} \chi(ag) = 0 \end{aligned}$$

であり、 $\chi(a) \neq 1$  であるから  $\sum_{g \in G} \chi(g) = 0$  である。

(4) (i)  $\chi, \chi' \in \widehat{G}$  に対して

$$g^*(\chi\chi') = \chi\chi'(g) = \chi(g)\chi'(g) = g^*(\chi)g^*(\chi')$$

より  $g^*$  は準同型写像である。

(ii)  $g, g' \in G, \chi \in \widehat{G}$  に対して

$$(gg')^*(\chi) = \chi(gg') = \chi(g)\chi(g') = g^*(\chi)g'^*(\chi) = (g^*g'^*)(\chi)$$

より  $\varphi$  は準同型写像である。 $G$  の生成元  $a$  に対して  $a^*$  が  $\widehat{G}$  の生成元となることから  $\varphi$  は同型写像である。

**5** (1)  $\int_0^t p(s)ds = P(t)$  として、 $\exp[-P(t)]$  を方程式に掛けると

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\exp[-P(t)]x(t)) \\ &= \exp[-P(t)]\frac{dx(t)}{dt} - p(t)\exp[-P(t)]x(t) = q(t)\exp[-P(t)] \end{aligned}$$

を得る。両辺を 0 から  $t$  まで積分すれば

$$\exp[-P(t)]x(t) - x_0 = \int_0^t q(s)\exp[-P(s)]ds$$

すなわち

$$x(t) = \exp[P(t)]x_0 + \int_0^t q(s)\exp[P(t) - P(s)]ds$$

である。

(2) まず、定数関数 0 は明らかに与えられた方程式の解である。次に  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  が解であるとする。すなわち

$$\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + p(t)\frac{dx_1(t)}{dt} + q(t)x_1(t) = 0, \quad \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} + p(t)\frac{dx_2(t)}{dt} + q(t)x_2(t) = 0$$

である。このとき

$$\begin{aligned} & \frac{d^2(x_1(t) + x_2(t))}{dt^2} + p(t)\frac{d(x_1(t) + x_2(t))}{dt} + q(t)(x_1(t) + x_2(t)) \\ &= \left( \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + p(t)\frac{dx_1(t)}{dt} + q(t)x_1(t) \right) + \left( \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} + p(t)\frac{dx_2(t)}{dt} + q(t)x_2(t) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるので、 $x_1(t) + x_2(t)$  もまた解となる。さらに任意の  $k \in \mathbf{R}$  に対して

$$\frac{d^2kx_1(t)}{dt^2} + p(t)\frac{dkx_1(t)}{dt} + q(t)kx_1(t) = k \left( \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + p(t)\frac{dx_1(t)}{dt} + q(t)x_1(t) \right) = 0$$

であるので、 $kx_1(t)$  もまた解となる。以上より、解の全体は部分空間となる。

6 (1) 下記の性質より成立する.

$$s \text{ が } \gamma \text{ の弧長パラメータ} \implies s = \int_0^s |\gamma'(u)| du \implies 1 = \frac{ds}{ds} = \frac{d}{ds} \int_0^s |\gamma'(u)| du = |\gamma'(s)|.$$

$$\forall s, |\gamma'(s)| = 1 \implies 0 \text{ から } s \text{ まで動いたときの } \gamma \text{ の弧長} = \int_0^s |\gamma'(u)| du = \int_0^s du = s.$$

(2)  $\gamma(s)$  での単位接ベクトル  $\gamma'(s) = (x'(s), y'(s))$  を反時計回りに  $\pi/2$  回転させたベクトル  $n(s) = (-y'(s), x'(s))$  が単位法線ベクトルである. 加速度ベクトル  $\gamma''(s)$  は  $\gamma'(s)$  に直交している. よって,  $\gamma''(s) = \kappa(s)n(s)$  ( $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ ) と書ける. この  $\kappa(s)$  を  $\gamma(s)$  の曲率という.

(3)  $\tilde{\gamma}(s) = (\gamma(s), 0)$  において,  $\tilde{\gamma}''(s) = (\gamma''(s), 0)$  である.  $\tilde{\gamma}(s)$  の主法線ベクトル  $\tilde{n}(s)$  は  $\tilde{n}(s) = \tilde{\gamma}''(s)/|\tilde{\gamma}''(s)|$ . また,  $\tilde{\gamma}(s)$  の曲率  $\tilde{\kappa}(s)$  は平面曲線と同様の  $\tilde{\gamma}''(s) = \tilde{\kappa}(s)\tilde{n}(s)$  で定義されるので,  $\tilde{\kappa}(s) = |\tilde{\gamma}''(s)| = |\gamma''(s)| = |\kappa(s)n(s)| = |\kappa(s)|$ .

(4)  $\tilde{n}(s) = \tilde{\gamma}''(s)/|\tilde{\gamma}''(s)| = (\gamma''(s), 0)/|(\gamma''(s), 0)| = \kappa(s)(n(s), 0)/|\kappa(s)(n(s), 0)| = \pm(n(s), 0) = \pm(-y'(s), x'(s), 0)$  より,  $\tilde{\gamma}(s)$  の従法線ベクトルは,  $\tilde{b}(s) = \tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{n}(s) = \pm(x'(s), y'(s), 0) \times (-y'(s), x'(s), 0) = \pm(0, 0, 1)$ . よって, 捩率は  $\tau(s) = \tilde{n}'(s) \cdot \tilde{b}(s) = \pm(-y''(s), x''(s), 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$ .

理工学 専攻（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

試験科目：第 外国語（ ） / 専門科目（ 理工基礎（物理学基礎） ）

試験時間：（ 150 ）分

11. (1) 固有値: 1, 4(重根), 固有ベクトル:  $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 

(2) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(3) 
$$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ -4 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

2.  $a^8 + a^4 + 1$

2

1.  $e^{\pi i/4}, e^{3\pi i/4}, e^{5\pi i/4}, e^{7\pi i/4},$

2.  $\pm \frac{\sqrt{2}}{8}(1 - i)$

3.  $\int_0^\pi \frac{R^2 e^{2i\theta}}{1 + R^4 e^{4i\theta}} i R e^{i\theta} d\theta$

4. 省略

5.  $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

3 以下では変数の上のドットは時間微分を表す

1.  $m\ddot{x}_1 = -3kx_1 + kx_2$

2.  $m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2$

3.  $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. 固有値:  $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ , 固有振動数:  $\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}}$

5. 固有値:  $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ , 固有ベクトル:  $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

6.  $-\frac{x_0}{\sqrt{5}} \left( \cos \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}} t - \cos \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}} t \right)$

4

1.  $r > R: \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r \leq R: \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$

2.  $\sqrt{\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^3 m}}$

3.  $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \omega_c \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega_0^2 y + \omega_c \frac{dx}{dt}$

4.  $\frac{d^2 u}{dt^2} = -\omega_0^2 u + i\omega_c \frac{du}{dt}$

5.  $x(t) = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \cos \omega_2 t, \quad y(t) = C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \sin \omega_2 t,$   
ただし,  $\omega_{1,2} = \frac{\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_0^2}}{2}$

6.  $\omega_c$

1.

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_0\right) \psi_1(x) &= E\psi_1(x), \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_2(x) &= E\psi_2(x), \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_0\right) \psi_3(x) &= E\psi_3(x) \end{aligned}$$

$$2. \quad \beta = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

3.

$$\begin{aligned} \psi_1(x = -a) &= \psi_2(x = -a), & \frac{d\psi_1(x = -a)}{dx} &= \frac{d\psi_2(x = -a)}{dx}, \\ \psi_2(x = a) &= \psi_3(x = a), & \frac{d\psi_3(x = a)}{dx} &= \frac{d\psi_4(x = a)}{dx} \end{aligned}$$

$$\gamma = \beta \tan(\beta a)$$

4.  $\eta = \xi \tan \xi$ , 図は省略

$$5. \quad \frac{2mV_0}{\hbar^2} a^2$$

$$6. \quad a < \frac{\pi \hbar}{\sqrt{2mV_0}}$$

7.  $\gamma = \beta \cot \beta a$ , 図は省略

$$8. \quad a \geq \frac{\pi \hbar}{2\sqrt{2mV_0}}$$

6

1.  $Nk_B \log 2$
2.  $-k_B T \log \left( 2 \cosh \frac{\gamma B}{k_B T} \right)$
3.  $-\gamma B$ , 基底状態の内部エネルギーと一致
4.  $k_B \left[ \log \left( 2 \cosh \frac{\gamma B}{k_B T} \right) - \frac{\gamma B}{k_B T} \tanh \frac{\gamma B}{k_B T} \right]$
5.  $k_B \log 2$
6.  $B$  の減少とともに温度が下がる

理工学 専攻（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

試験科目：専門科目（理工基礎（生物科学基礎））

試験時間：（150）分

1

(1) 間期の真核細胞の核内では DNA はヒストンに巻きついてヌクレオソームとなり、それがさらに折りたたまれて約 30 nm の直径をもつクロマチン繊維として存在している。遺伝子の複製や転写の際にはクロマチン繊維の構造を変化させることが重要となる。

(2) DNA のシトシンのメチル化や、DNA が巻き付いているヒストンタンパク質のアセチル化・メチル化などの修飾により、DNA の塩基配列を変えることなく、親細胞から娘細胞へと遺伝子発現パターンが伝えられる遺伝様式。

(3) 部分的に折りたたまれたポリペプチド鎖に結合し、エネルギー的に起こりやすい経路に沿って折りたたみを促進することで、タンパク質の変性や誤った折りたたみを防ぐ分子。

(4) 動物組織の隣接細胞間にある細胞結合様式のひとつで、隣接する細胞両方に存在するコネクソンと呼ばれるタンパク質複合体の端どうしが繋がることで隣合う細胞のサイトゾルを連絡するチャンネルを形成する。この通路を介して1つの細胞から隣の細胞へイオンや小分子が通過できる。例えば、心筋細胞の協調的収縮に寄与する。

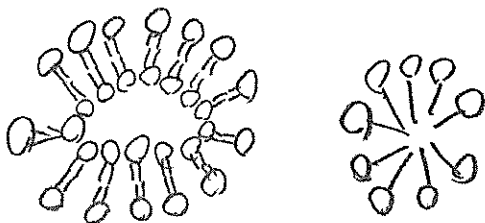
(5) 細胞外リガンドによる受容体の活性化の後、細胞内の三量体 GTP 結合タンパク質 (G タンパク質) と結合する細胞表面受容体。7回膜貫通の  $\alpha$  ヘリックスで膜に埋め込まれている。ホルモン、神経伝達物質など多様なシグナル分子に対する細胞応答を仲介する。そのため、いろいろな疾患を対象にする薬剤の標的となっている。

2

(1) 1つの物質(分子)の中で電子が偏在しており、部分的な電荷が生じている物質を極性物質といい、水分子などの他の極性物質と静電引力によって弱く結合できる。従って水に溶ける。それに対して電子が均一に分布しており、どこにも電荷がないものを非極性物質といい、水分子を引き付けることができないので水をはじく性質となる。両親媒性物質とは大きな非極性部分と、極性部分を合わせ持つ物質であり、非極性部分は非極性物質と疎水性相互作用によって結合でき、一方で極性部分によって水に溶解することができる。界面活性剤がその例である。

(2) 1, 3, 4

(3)



リポソーム

ミセル

リン脂質が形成するリポソームは脂質二重層によってできており、リン脂質の親水性部分はリポソームの外側と内側に向いている。従って、リポソームの内部には水で満たされた空間がある。ミセルは界面活性剤の疎水性部分が内側に、親水性部分が外側に向いている。内部は疎水性部分で満たされている。

3

(1) 一部のタンパク質はミトコンドリア DNA にコードされ、ミトコンドリア内で転写、翻訳される。他の多くのタンパク質は核 DNA にコードしており(祖先である細菌から核へ移動した)、細胞核内で転写され、主にサイトゾル(細胞質)で合成される。これらのタンパク質は通常 N 末端にミトコンドリア移行シグナル配列をもつため、ミトコンドリア内に輸送される。

(2) ヒトの細胞で働くプロモーターを有したプラスミド DNA に、GFP をコードした DNA とミトコンドリア移行シグナル配

列をコードした DNA 断片を挿入する(制限酵素で切る、リガーゼを使うなど)。このプラスミドを培養細胞にトランスフェクション(遺伝子導入)する(リポフェクションなど)。細胞は遺伝子導入の1~数日後に蛍光顕微鏡で観察する。

#### 4

(1) DNA ポリメラーゼは鋳型となる1本鎖 DNA を必要とするが、2本鎖 DNA を1本鎖に解離することができない。そこで、ヘリカーゼが染色体 DNA 上の複製開始点に結合し、2本鎖 DNA を1本鎖に解離する。ヘリカーゼは解離した1本鎖の一方に結合したまま DNA 上を移動して解離を続ける。

DNA ポリメラーゼは鋳型鎖があっても自身だけで DNA 合成をスタートすることができない。DNA 合成をスタートするにはプライマーと呼ばれる短いポリヌクレオチド鎖が鋳型鎖に相補的結合をしている必要がある。プライマーゼはヘリカーゼが解離した1本鎖鋳型鎖に結合し、短い RNA でできたプライマーを合成する。

PCR においてはヘリカーゼが行っている2本鎖の解離を、90度以上の高熱によって実現している。また、プライマーゼが行っているプライマーの合成は、化学合成したプライマーを反応液に加え、適度な温度に保つことによって鋳型鎖と相補結合させることで実現している。

(2) オペレーターはプロモーターに隣接する比較的狭い領域であり、ここに物質が結合するかどうかで転写調節を行っている。従って、結合する物質の数は限られる。それに対してエンハンサーはプロモーターと離れた場所にあっても良い。従って、1つのプロモーターの活性を調節するエンハンサーは多数存在できる。多数の調節物質が関与することによって、細胞の分化状態や細胞のおかれている環境に応じて複雑で細かい調節が可能になっている。

(3) DNA は細胞が保持している遺伝情報であり、DNA ポリメラーゼが複製した DNA は細胞分裂の後に生じる娘細胞の唯一無二の遺伝情報となる。従って複製には正確性が求められる。それに対し、RNA ポリメラーゼが合成する RNA は1つの遺伝子から多数合成され、また、それ自身が機能するか mRNA としてタンパク質合成に使われた後は分解される。一部に不正確な RNA が合成されてもそれによる影響は限定的である。したがって RNA 合成は正確性よりも速度が求められる。

#### 5

(1) どちらの電子伝達系においても、タンパク質複合体間を電子が移動する際に膜を介したプロトン濃度勾配が形成される点で共通している。一方で、エネルギー源や電子の出発点、および最終的な電子受容体が異なる。ミトコンドリアではグルコースなどの基質の分解によって得られた高エネルギー電子を用いて、酸素を最終電子受容体とし水を生成する。一方、葉緑体の電子伝達系は光エネルギーによって水から電子を取り出し、 $\text{NADP}^+$ を還元して NADPH を生成し、同時に酸素を副産物として放出する。

(2) どちらの ATP 合成酵素も膜に埋め込まれた  $F_0$  部位と、ATP を合成する  $F_1$  部位から成る複合体である。電子伝達系により膜を隔てたプロトン濃度勾配が形成されると、 $F_0$  部位を通してプロトンが高濃度側から低濃度側へ運搬され、その際  $F_0$  部位の軸部分が回転する。この回転に連動して  $F_1$  部位の構造が周期的に変化し、ADP と無機リン酸から ATP を合成する。

#### 6

(1) PCR は対象となる遺伝子の断片を増幅した後に電気泳動でバンドを確認する定性的手法であり、発現の有無は判別できるものの、発現量の正確な定量は困難であった。これに対して Real Time PCR は、PCR 反応中に蛍光シグナルの変化をリアルタイムで測定し、シグナルが一定の閾値(threshold)に達するまでのサイクル数(Ct 値)を基に、遺伝子発現量を定量的に評価できるため、この方法が主流となった。

(2) ハウスキーピング遺伝子は、細胞の基本的な機能を維持するために常に安定して発現しており、その発現量は異なる組織や条件間でも大きく変動しない。この安定性を利用することで、サンプル間の cDNA 量の違いや PCR 反応率のばらつきなどの技術的誤差を補正できるため、目的遺伝子の発現量をより正確に比較・評価するために解析される。

(1) 主に3つの要因による。1. 細胞間の情報伝達:細胞同士がシグナルをやり取りすることで、それぞれの挙動を調整している。細胞の生存も外部からのシグナルに依存しており、それにより必要な時に、必要な数の細胞が作られる。2. 選択的な細胞接着:細胞の種類ごとに異なるカドヘリンなどの細胞接着分子があり、選択的な細胞同士の接着が行われる。これにより細胞は適切な位置に保たれる。3.細胞記憶:発生過程で得た遺伝子の発現様式じゃその後も安定的に保たれるため、細胞はその個別の性質を維持して子孫に引き継ぐことができる。

(2) 電子放射線は物質を通過する際に電子を軌道からたたき出し化学結合を切断する。それによりDNAが損傷を受け、その損傷を修復できない場合には細胞はアポトーシスを起こす。小腸上皮は細胞の入れ替えが盛んで、上皮細胞は陰窩で誕生してから絨毛の先端で脱落するまで3-6日(ヒト)である。電離放射線で細胞分裂が妨げられると、数日のうちに細胞が剥がれ落ちてしまうため、上皮の機能が果たせず下痢が起こる。

理工学 専攻（博士前期/修士・博士後期・前後期共通）

試験科目：専門科目（理工基礎（情報学基礎））

試験時間：（150）分

1

- (1) (a) レジスタとは、CPU 内部に設置された記憶装置である。CPU が実行する命令やデータ等が記憶される。主記憶装置と比較して、記憶容量は非常に小さいが、高速な読み書きができる特徴がある。
- (b) ROM は読み出し専用の不揮発性の記憶装置である。BIOS や組み込み機器の制御プログラムなどを格納する際に使用される。RAM は読み書きができる揮発性の記憶装置である。一般的なコンピュータの主記憶装置などに使用される。
- (c) CPU のマルチコア化とは、1つの CPU チップに複数のプロセッサコアを搭載する技術のことである。並列処理が可能になるため、シングルコアプロセッサよりも処理能力が向上する。

(2) (a)

$I_0$	$I_1$	$O_0$	$O_1$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

(b)  $a+b+c_i$  の加算結果  $s$  とキャリー  $c_o$  が出力される。下の桁からの桁上がり  $c_i$  がある場合の 1 ビットの加算器として用いられる。

$a$	$b$	$c_i$	$s$	$c_o$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

(c) 3 ビットの符号付き 2 進数の加減算回路である。X=0 で加算、X=1 で減算を行う。減算では 2 の補数表現にして加算する。

## 2

(1)

- (A) 10 ソースコード (B) 13 あらかじめ用意された機械語ルーチン呼び出して  
(C) 1 実行可能 (D) 9 デバッグ (E) 2 コンパイル (F) 16 低速  
(G) 5 バイトコード (H) 8 仮想マシン (I) 7 字句 (J) 11 構文

(2)

普通の変数と異なる，値の変更が認められるかどうか？また，可読性，保守性等の観点から使用する目的と利点について解答で説明する。

(3)

変数の型がいつ決定されるか？型の整合性がいつ検査されるかについて解答で説明する。また，その特徴と利点を説明する。

(4)

2つのリンク方式について，ライブラリを結合するタイミングを特徴として解答で説明する。さらに，メモリの利用効率，ライブラリの更新時の影響について利点と欠点を合わせて説明する。

# 3

この問題の意図は、主に次の2点である。

## 1. 数値積分の理解

解析的に積分できる関数  $x^2$  をあえて数値的に近似させることで、台形公式の仕組み

$$\left( \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \Delta x \right) \text{ を理解させること。}$$

## 2. プログラムと数式の対応づけ

ループ処理が「区間の分割」、加算処理が「面積の総和」に対応していることを読み取ること。

単なるコード読解ではなく、「数学的手法（台形公式）をプログラムとして実装するとどうなるか」を理解しているかを確認する問題である。

### 問1

$$\text{area} = 2.5 + 6.5 + 12.5 + 20.5 + 30.5 = 72.5$$

### 問2

$f(x) = x^2$  の定積分  $\int_1^6 x^2 dx$  を台形公式で近似するプログラムである。

区間  $[1, 6]$  を5分割し、各小区間で

$$\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \Delta x \text{ を加算している。}$$

### 問3

各分点  $x_i = \text{initial} + i \text{width}$  に対し

$$x_i^2 = (\text{initial} + i \text{width})^2 = \text{initial}^2 + 2 \text{initial width } i + \text{width}^2 i^2$$

と展開する。よって中間和は

$$\sum x_i^2 = m \text{initial}^2 + 2 \text{initial width} \sum i + \text{width}^2 \sum i^2$$

となるため、総和公式

$$\sum i = \frac{m(m+1)}{2}, \quad \sum i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

を用いて計算する。

よって

$$\text{(ア) } \text{double sum\_i} = m * (m + 1) / 2.0;$$

$$\text{(イ) } \text{double sum\_i2} = m * (m + 1) * (2 * m + 1) / 6.0;$$

## 4

(1) 図より

$$y(k) = 2x(k) - x(k-1) + x(k-2) + \frac{2}{3}y(k-1)$$

となる.

(2)  $x(k)$ ,  $y(k)$  の  $z$  変換をそれぞれ  $X(z)$ ,  $Y(z)$  とおくと

$$\left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right)Y(z) = (2 - z^{-1} + z^{-2})X(z)$$

となる. したがって

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}$$

となる.

(3)  $x(k) = \delta(k)$  のとき  $X(z) = 1$  であるから

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z) \\ &= \frac{2 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} \\ &= 2 + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{11}{9} \frac{z^{-2}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} \end{aligned}$$

となる.

(4) (3) より  $H(z)$  の逆  $z$  変換を求めると

$$h(k) = 2\delta(k) + \frac{1}{3}\delta(k-1) + \frac{11}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} u(k-2)$$

が求めるインパルス応答である.

(5) 極について  $|\frac{2}{3}| < 1$  より安定である.

# 5

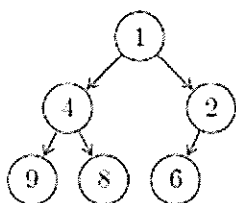
(1)  $f_1(n) = \log n$ ,  $f_2(n) = 2\sqrt{\log n}$ ,  $f_3(n) = \sqrt{2n}$ ,  $f_4(n) = n(\log n)^2$ ,  $f_5(n) = n^{1/3}$ ,  
 $f_6(n) = n^{\log n}$ ,  $f_7(n) = 10^n$  である。

(2) (a) 数列 (あるいは配列) で表現されたバイナリヒープが満たすべき条件は以下の通りである。

- それぞれの要素にキー値が設定されている。
- $i > 1$  のとき,  $i$  番目の要素のキー値は  $\lfloor i/2 \rfloor$  のキー値以上である。

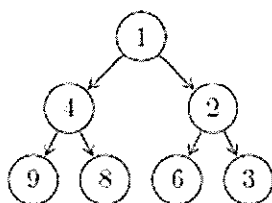
(b) バイナリヒープ

(1, 4, 2, 9, 8, 6) の 2 分木による表現



(c) キー値が 3 の要素を加

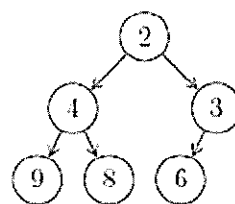
えた後のバイナリヒープの 2 分木による表現



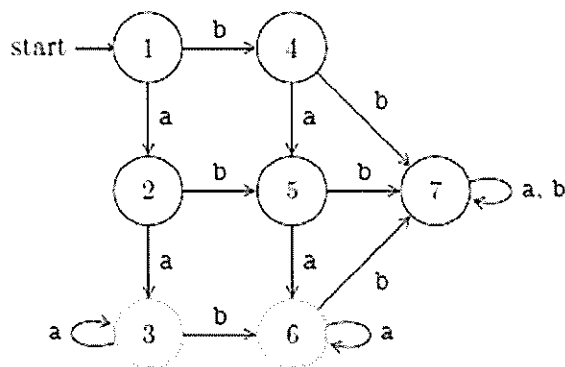
(d) もっとも優先順位の

高い要素 (すなわちキー値が

最小の要素) を 1 つ取り出した後のバイナリヒープの 2 分木による表現



(3) 例えば, 下図が言語  $L$  を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図である。また, この決定性有限オートマトンを 5 つ組  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  で表すと,



$Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $q_0 = 1$ ,  $F = \{3, 6\}$  であり, 状態遷移関数  $\delta$  は  
 $\delta(1, a) = 2$ ,  $\delta(1, b) = 4$ ,  $\delta(2, a) = 3$ ,  $\delta(2, b) = 5$ ,  $\delta(3, a) = 3$ ,  $\delta(3, b) = 6$ ,  
 $\delta(4, a) = 5$ ,  $\delta(4, b) = 7$ ,  $\delta(5, a) = 6$ ,  $\delta(5, b) = 7$ ,  $\delta(6, a) = 6$ ,  $\delta(6, b) = 7$ ,  
 $\delta(7, a) = 7$ ,  $\delta(7, b) = 7$  である。

## 6

(1)

	射影	選択	直積
(a) 演算記号	$\pi$	$\sigma$	$\times$
(b) 目的	指定した列（属性） だけを取り出す	ある条件を満た す行（レコー ド）だけを取り 出す	2つのリレーショ ンの全ての組み合 わせを作る（結合 の前段階）
(c) リレーシ ョナル代 数表現の 例	$\pi_{名前, 学籍番号}$ (学生)	$\sigma_{年齢>20}$ (学生)	学生 $\times$ 履修
(d) その表現 が意味す る操作の 説明	「学生」テーブルか ら「名前」と「学籍 番号」列だけを抽出 （重複は除かれる）	「学生」テーブ ルから「年齢 > 20」の行だけを 抽出	「学生」と「履 修」の全ての組み 合わせを生成
(e) 対応する SQL 文	SELECT DISTINCT 名 前, 学籍番号 FROM 学生;	SELECT * FROM 学生 WHERE 年 齢 > 20;	SELECT * FROM 学 生, 履修; (WHERE 句なし)

(2)

### 1. ロールフォワード (REDO)

ロールフォワードは、障害発生前に正常に完了（コミット）していたトランザクションの操作を再実行することで、データベースを最新の状態に復旧する方法である。トランザクションログに記録された「変更後の情報（REDO ログ）」を用いて、バックアップから復元したデータベースに対して更新操作を再適用する。これにより、障害によって失われた更新内容を復元できる。

### 2. ロールバック (UNDO)

ロールバックは、未完了または異常終了したトランザクションによる変更を取り消す処理である。障害発生時やトランザクションの中断時に、整合性を保つために必要となる。トランザクションログに記録された「変更前の情報（UNDO ログ）」を参照し、データベースを元の状態に戻すことで、部分的に実行された操作を無効化する。

### 3. チェックポイント法

チェックポイント法は、データベースの整合性が保たれた状態を定期的に保存する仕組みである。DBMS は一定間隔でチェックポイントを作成し、メモリ上の変更をディスクに書き出す。障害発生時には、最新のチェックポイントから復旧を開始し、それ以降のコミット済みトランザクションをロールフォワードで再実行し、未完了のものはロールバックで取り消す。これにより、ログ全体を読み込む必要がなくなり、復旧時間が短縮される。

### 4. 比較と使い分けのポイント

項目	ロールフォワード	ロールバック	チェックポイント法
対象	コミット済みの操作	未完了の操作	整合性のある復旧開始点
使用ログ	REDO ログ	UNDO ログ	チェックポイント+ログ
主な目的	更新の再適用	更新の取り消し	復旧処理の効率化
使用タイミング	障害復旧時	障害時・中断時	定期的に自動実行

これら3つの方式は、データベースの整合性（ACID特性）を維持するために連携して機能する。障害発生時には、チェックポイントを起点に、REDOでコミット済みの操作を再実行し、UNDOで未完了の操作を取り消すことで、正しい状態に復旧できる。

(3)

#### ドキュメント型 NoSQL

データはJSON、BSON、XMLなどの形式で保存される「ドキュメント」として管理される。各ドキュメントは、キーと値のペアを持ち、階層構造（ネスト）を含むことができる。スキーマが柔軟で、ドキュメントごとに異なる構造を持つことが可能である。

#### グラフ型 NoSQL

データはノード（点）とエッジ（線）で構成されるグラフ構造として保存される。ノードはエンティティ、エッジは関係を表す。探索が高速で、複雑なネットワーク構造の分析に強い。

#### 🔍 違いのまとめ

比較項目	ドキュメント型	グラフ型
データ構造	階層型ドキュメント（JSONなど）	ノードとエッジによるグラフ
関係性の表現	ドキュメント内に埋め込むか、参照	エッジで直接表現（明示的）
検索・操作	キーによる検索、全文検索	関係性の探索（パス、隣接）
適した用途	柔軟な構造のデータ管理	複雑な関係性の分析・可視化

7

$$(1) (1+x^2)(1+y^2)y' = (y^2-1)xy$$

$$y \neq \pm 1.0 \text{ のとき、} \frac{(1+y^2)}{(y^2-1)y} y' = \frac{x}{1+x^2} \text{ から } \int \left( -\frac{1}{y} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y-1} \right) dy = \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\int \left( -\frac{1}{y} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y-1} \right) dy = \ln \left| \frac{y^2-1}{y} \right| + C$$

$$1+x^2 = t \text{ とおくと、} \frac{dt}{dx} = 2x \text{ なので、} \int \frac{x}{t} \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C$$

$$\text{したがって、} \ln \left| \frac{y^2-1}{y} \right| = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C$$

また、 $y = \pm 1.0$  のとき与式を満たすので、これらも解

$$(2) xy' = y - x \cos^2 \frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x} = t \text{ とおくと、} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2} \left( x \frac{dy}{dx} - y \right) \text{ なので、} x \frac{dt}{dx} = -\cos^2 t$$

$$\cos^2 t \neq 0 \text{ のとき、} \frac{1}{\cos^2 t} \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x} \text{ より、} \tan t = -\ln|x| + C$$

したがって、 $\tan \frac{y}{x} = -\ln|x| + C$  ただし、 $C$  は任意の定数。

$\cos^2 t = 0$  のとき  $t = \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} + n\pi$  から  $y = x \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right)$  ただし、 $n$  は任意の整数。これも与式を満たすので解。

$$(3) (y-x)^2 y' = 1$$

$$y-x = t \text{ とおくと、} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1 \text{ から } t^2 \left( \frac{dt}{dx} + 1 \right) = 1$$

$$t^2 - 1 \neq 0 \text{ のとき } \frac{t^2}{t^2-1} \frac{dt}{dx} = 1 \text{ なので } -t + \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = x + C_1$$

$$\text{したがって、} -(y-x) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y-x}{1-y-x} \right| = x + C_1 \text{ なので、}$$

$$\ln \left| \frac{1+y-x}{1-y-x} \right| = 2y + C_2 \quad C_2 \text{ は任意の定数}$$

$t = \pm 1$  のとき  $y = x \pm 1$  で与式を満たすのでこれらも解

$$(4) x(y'+1) = -\tan(x+y)$$

$$x+y = t \text{ とおくと } \frac{dt}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \text{ から } x \frac{dt}{dx} = -\tan t$$

$$(i) \tan t \neq 0 \text{ のとき } \frac{1}{\tan t} \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x} \text{ から } \int \frac{\cos t}{\sin t} dt = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\sin t = u \text{ とおくと } \frac{du}{dt} = \cos t \text{ より } \int \frac{\cos t}{u} \frac{du}{\cos t} = -\ln|x|$$

したがって、 $\ln|\sin(x+y)| = -\ln|x| + C$  から  $\ln|x \sin(x+y)| = C$   $C$  は任意の定数

(ii)  $\tan t = 0$  のとき  $y = -x + n\pi$  であり、これも与式を満たすので解